Variáveis Complexas

March 17, 2005

1 Números Complexos

1.1 Motivação

Resolver a equação

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \tag{1.1}$$

vemos que não existe nenhum $x = r \in \mathbb{R}$ que satisfaça a equação. Portanto se faz necessário estender o conjunto dos reais a um conjunto maior na qual a equação anterior tenha solução. Assumindo que podemos aplicar raiz quadrada em (1.1) obtemos que $x = \pm\sqrt{-1}$ a qual não faz sentido no conjunto dos numeros reais, portanto extenderemos este conjunto a um conjunto maior a equação (1.1) tenha solução. Desta forma introduzimos um novo elemento, que denotaremos por i chamada de unidade imaginária satisfazendo $i^2 = -1$ (informalmente podemos considerar $i = \sqrt{-1}$). Assim a equação (1.1) tem soluções $x = \pm i$. O novo conjunto que contém os números reais e a unidade imaginária será denotado por $\mathbb{C}$ a qual será chamado de o conjunto dos números complexos. É necessário que este conjunto preserve as propriedades aritméticas dos números reais, isto é produto e soma de dois elementos de $\mathbb{C}$ também deverão pertencer a $\mathbb{C}$, assim a extensão natural dos numeros reais será

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \quad \begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) & : \text{parte real de } z \\ b = \mathrm{Im}(z) & : \text{parte imaginária de } z \end{cases}$$

Claramente os numeros reais r pertencem a $\mathbb{C}$ pois $r = r + 0i$, também vejamos que as potências da unidade imaginária pertencem a $\mathbb{C}$:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots, i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$$

1.2 Operações aritméticas

Podemos informalmente somar e multiplicar números complexos, vejamos quais seriam os resultados, se $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, então

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \in \mathbb{C} \\ z_1 \cdot z_2 &= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Portanto podemos estender essas operações definindo

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &:= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

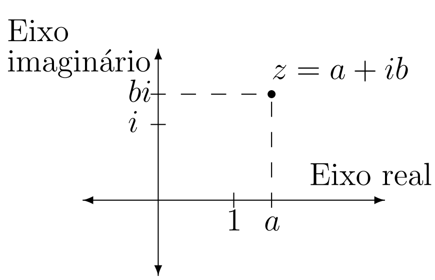
Pode-se verificar que estas operações possuim as propriedades associativa, comutativa e distributiva. Os elementos neutros aditivo e multiplicativo são 0 e 1 respectivamente, o inverso aditivo de $z = a + ib$ é $-z = -a - ib$ e o inverso multiplicativo (desde que $z \neq 0$) é um número complexo w tal que $zw = wz = 1$, assim w pode ser denotada por $w = z^{-1} = 1/z$. Se $w = c + id$ para que $zw = 1$ as contantes c e d devem satisfazer

$$\begin{matrix} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Também podemos chegar a este mesmo resultado procedendo informalmente, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

O plano Complexo: Como para determinar um número complexo é necessário de dois número reais podemos identificar números complexos com pares ordenados reais através do isomorfismo $z = a + ib \mapsto (a, b)$ entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$. Assim podemos considerar os números complexos como pontos do plano.



Para $z = a + ib$ definimos os seguintes operações

$$\begin{aligned} \bar{z} &:= a - ib \qquad &: \text{conjugado de } z \\ |z| &:= \sqrt{a^2 + b^2} \qquad &: \text{módulo de } z \end{aligned}$$

Algumas propriedades destas operações:

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z$
3. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$
4. $|zw| = |z||w|, \quad |z/w| = |z|/|w|, \quad |\bar{z}| = |z|$
5. $|z|^2 = z\bar{z}, \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ (desde que $z \neq 0$)
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$: Desigualdade triangular

Prova da desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

En que caso $|z + w| = |z| + |w|$ com $w \neq 0$?

$$\begin{aligned} &|z+w|^2 = (|z|+|w|)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) = 2|z||w| \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z\bar{w}}{|w|^2}\right) = \frac{|z|}{|w|} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \left|\frac{z}{w}\right| \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{w} \geq 0 \end{aligned}$$

1.3 Forma polar dos complexos

Seja $z \neq 0$, desde que $z = x + yi \sim (x, y)$ Podemos considerar:

$$\begin{aligned} r &: \text{ distancia de } z \text{ ao origem } (r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| > 0) \\ \theta &: \text{ ângulo que } z \text{ forma com o semieixo real positivo} \end{aligned}$$

Então temos as seguintes identidades

$$\begin{array}{c} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}$$

Desta forma z pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ &= r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \ : \text{ Forma polar} \end{aligned}$$

O ângulo θ é chamado argumento de z e denotado $\arg(z) := \theta$. Como coseno e seno são funções periódicas de periodo 2π, isto é

$$\begin{array}{l} \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta) \end{array} \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Assim podemos representar z com vários ângulos diferentes, isto é,

$$z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$$

De esta forma $\arg(z)$ é uma função multivaluada. Se restringimos o valor de $\arg(z)$ a um intervalo semiaberto de cumprimento 2π evidentemente será univocamente determinado. Em particular os valor de $\arg(z)$ restrito ao intervalo $]-\pi, \pi]$ será chamado valor principal do argumento de z e denotado por $\arg_p(z)$, isto é

$$\begin{aligned} \arg_p : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow\ ]-\pi, \pi] \\ z &\rightarrow\ \theta \end{aligned}$$

é uma função univocamente determinada.

Exemplo: Escreva $z = \sqrt{3} + i$ na sua forma polar. Fazendo os cálculos encontramos que $r = 2$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 2\cos(\theta) \\ 1 &= 2\sin(\theta) \end{aligned}$$

dai segue que $\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, isto é $\arg(z) = \{(\pi/6) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, portanto $\arg_p(z) = \pi/6$. Assim

$$z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$$

Fórmula de Mouvre: Observe que se $z_1 = r_1[\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)]$ e $z_1 = r_2[\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)]$ então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

logo $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ e $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. Indutivamente pode-se mostrar que

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)]$$

em particular, se $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ tem-se

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}$$

isto é

$$\Big(r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]\Big)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}$$

de onde obtemos a fórmula de Moivre:

$$\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Denotemos por

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) := e^{i\theta}$$

vemos que a fórmula de Mouvre pode ser escrita da seguinte forma

$$[e^{i\theta}]^n = e^{in\theta}$$

Tambem pode ser mostrado que as propriedades da função exponencial se preservam

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

De esta forma polar de um número complexo z pode ser escrito como

$$z = re^{i\theta}$$

onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.

Exemplo Encontre todas as soluções de $z^n + \alpha = 0$, onde $\alpha > 0$.

$z = re^{i\theta}$

$$z^n = -\alpha \quad \Leftrightarrow \quad r^n e^{in\theta} = -\alpha \tag{1.2}$$

$$|r^n||e^{in\theta}| = |-\alpha| \quad \Rightarrow \quad r^n = \alpha \quad \Rightarrow \quad r = \alpha^{1/n}$$

substituindo em (1.2) obtemos

$$\alpha e^{in\theta} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad e^{in\theta} = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(n\theta) = -1 \\ \sin(n\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad n\theta = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{(2k+1)}{n}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

por tanto as soluções são

$$z = \alpha^{1/n} e^{i\theta_k}, \quad \text{onde} \quad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

para determinar unicamente o ângulo de z temos que determinar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\pi < \theta_k \leq \pi$.

Exemplo Soluções de $z^2 + 2 = 0$

Exemplo Seja $w \in \mathbb{C}$, encontre as raizes n-ésimas $w^{1/n}$.

Para z ser uma reaiz n-ésima de w deve se ter $z^n = w$. Se $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\phi}$ então

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \tag{1.3}$$

$$|r^n||e^{in\theta}| = |\rho||e^{i\phi}| \quad \Rightarrow \quad r^n = \rho \quad \Rightarrow \quad r = \rho^{1/n}$$

substituindo em (1.3) obtemos

$$e^{in\theta} = e^{i\phi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(n\theta) = \cos(\phi) \\ \sin(n\theta) = \sin(\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad n\theta = \phi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

por tanto as raizes n-ésimas de w são

$$z = \rho^{1/n} e^{i\theta_k}, \quad \text{onde} \quad \theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

para determinar unicamente o ângulo de z temos que determinar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\pi < \theta_k \leq \pi$.

Exemplo Raizes n-ésimas da unidade.

1.3.1 Exemplos de conjuntos do plano complexo:

Exemplo Determine o conjunto de pontos $|z| < R$.

Exemplo Determine o conjunto de pontos $Re(z) \geq -3$ e $Im(z) > 1$.

Exemplo Determine o conjunto de pontos $Im(z^2) < 2$.

Exemplo Determine o conjunto de pontos $|Arg(z)| \geq \pi/4$.

Exercices:

1. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ e $\rho \in \mathbb{R}$. Encontre a parte real e imaginária dos seguintes números complexos
$$\frac{z}{w}, \quad \frac{z-\rho}{z+\rho}, \quad \frac{1}{z-i\rho}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \frac{z}{\bar{z}}, \quad \frac{z}{|z|}.$$

2. Mostre que

   (a) z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$.

   (b) z é imaginário puro se, e somente se, $z = -\bar{z}$.

   (c) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ e $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

3. Seja $z \in \mathbb{C}$ e n, m dois números inteiros, mostre que $\left|\frac{z^n}{\bar{z}^m}\right| = |z|^{n-m}$. Em particular, calcule $\left|\frac{(2+3i)^{5002}}{(2-3i)^{5000}}\right|$.

4. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Prove que
$$|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

5. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem.

6. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ e $\rho \geq 0$. Prove que
$$|\rho z| = \rho |z|$$
$$|zw| = |z||w| \text{ (Dica: use a forma polar)}$$

7. Mostre que
$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$$
Dê condições necessárias e suficientes para ter a igualdade

8. Determine o valor principal do argumento dos seguintes números complexos

$$-\sqrt{2}+\sqrt{2}i, \quad 1-\sqrt{3}i, \quad e^{13\pi i/4}, \quad 3e^{5\pi i/4}.$$

9. Usando a forma polar de um número complexo mostre que os valores de $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ são:

$$\begin{aligned} i/2 & \quad \text{se} \quad n=2 \\ -1/(2\sqrt{2})+i/(2\sqrt{2}) & \quad \text{se} \quad n=3 \\ -1/4 & \quad \text{se} \quad n=4. \end{aligned}$$

Também determine os valores para $n=5,6,7,8$.

10. Prove que a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação no sentido antihorário de um ângulo de comprimento $\pi/2$ do vetor correspondente.

11. Determine as soluções de

(a) $z^4=1$ (raizes quartas da unidade)

(b) $z^3=i$ (raizes cúbicas de i)

(c) $z^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ (raizes quadradas de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$)

12. Mostre que se $a,b\in\mathbb{C}$ as soluções de

$$z^2+az+b=0 \quad \text{são} \quad z=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{(Dica: Complete quadrados)}$$

13. encontre todas as soluções de

$$z^4+az^2+b=0, \quad \text{onde} \quad a=-1, \quad b=a^2/2$$

Dica: faça $z^2=w$, encontre os valores de w e depois de z.

14. Faça um gráfico do conjunto de pontos $z\in\mathbb{C}$ tal que

(a) $r\leq|z-z_0|<R$, onde z_0 é uma número complexo fixo.

(b) $|1/(z-1)|<1$

(c) $\mathrm{Re}(z+1)>a$, $(a\in\mathbb{R})$

(d) $\pi/2<|\arg(z^2)|\leq\pi$

(e) $\mathrm{Re}(1-z)=|z|$

(f) $|z-a|+|z+a|=2c$ onde $a\in\mathbb{R}$, $c>0$

2 Funções de variável complexa

Uma função de variável complexa é uma função $f(z)$ definida num subconjunto dos complexos e assume valores complexos. O domínio da função são é o conjunto dos números complexos para o qual a função faz sentido. A imagem da função é o conjunto de números complexos que assume a função. Como $f(z) \in \mathbb{C}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, temos que

$$f(z) = u(z) + v(z)i, \quad u(z), v(z) \in \mathbb{R},$$

Como $z = x + yi \sim (x, y)$ Podemos identificar $h(z) \sim h(x, y)$ assim podemos escrever

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i, \quad u(x, y) = Re(f(z)), v(x, y) = Im(f(z)),$$

Exemplos 1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $Dom(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$, $Imagem(f) = \{w \in \mathbb{C} : w \neq 0\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

Então

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

2.1 Extensões de funções reais aos complexos

Nesta seção extenderemos algumas funções elementares reaias ao conjunto dos complexos. Assim definimos as seguintes funções complexas:

1. Por causa do produto de números complexos, podemos definir Polinômios complexos

   $$p(z) \;=\; a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad \text{onde} \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

   Exercicio: Supondo $p(z) = \underbrace{(\alpha_0 + i\beta_0)}_{a_0}\underbrace{(x + iy)}_{z} + \underbrace{(\alpha_1 + i\beta_1)}_{a_1}\underbrace{(x + iy)^2}_{z^2}$, determine $u(x, y) = \mathrm{Re}(p(z))$ e $v(x, y) = \mathrm{Im}(p(z))$

2. Definimos a função exponencial complexa da seguinte forma

   $$e^z \;:=\; \underbrace{e^x cos(y)}_{Re(e^z)} + i\,\underbrace{e^x sen(y)}_{Im(e^z)}, \quad \text{onde} \quad z = x + iy$$

Que motivou está definição? Justificativa: Propriedades de exponencial

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x(cos(y) + isen(y)) \\ &= e^x cos(y) + ie^x sen(y) \end{aligned}$$

Se z fosse real, esta definição coincide com a função exponencial real? SIM: $z = x + 0i$, da definição temos que $e^z := e^x$.

e^z conserva a propriedade $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ da exponencial real? SIM! Verifique!

3. Definimos funções trigonométricas complexas da seguinte forma

$$cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad sen(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad tg(z) := \frac{sen(z)}{cos(z)}, \quad \ldots$$

Que motivou esta definição? Justificativa: definição de $e^{i\theta}$ com $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= cos(\theta) + isen(\theta) \\ e^{-i\theta} &= cos(\theta) - isen(\theta) \end{aligned}$$

Somando

$$cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Se z é real estas funções coincidem com as funções trigonométricas reais? SIM: Verifique

Estas funções complexas conservam as propriedades das funções reais? exemplo: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$? SIM verifique!

$cos(z)$ é limitada? NÃO, pois tomando $z = in$ com $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\cos(in) = \frac{e^{i(in)} + e^{-i(in)}}{2} = \frac{e^{-n} + e^n}{2} \quad \text{não é limitada}$$

Calcule $u(x, y) = \text{Re}(\sin(z))$.

4. Definimos as funções hiperbólicas da seguinte forma

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \quad \ldots$$

Também, poderiamos definir estas funções em termos de funções trigonométricas, da forma

$$\cosh(z) := \cos(-iz), \quad \sinh(z) := -i\sin(-iz)$$

Assim, as funções hiperbólicas podem ter propriedades semejantes as trigunometricas, por exemplo

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

5. Definimos o logaritmo da seguinte forma

$$\ln(z) := \underbrace{\ln(|z|)}_{Re(\ln(z))} + i \underbrace{\arg(z)}_{Im(\ln(z))},$$

Que motivou esta definição? Justificativa: Propriedades de Logaritmo. Se $z = re^{i\theta}$ temos

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \ln(re^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + \ln(e^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + i\theta \ln(e) \\ &= \ln(r) + i\theta \end{aligned}$$

Como $\arg(z)$ é uma função multivaluada $\ln(z)$ tambem é. Se considerarmos $\arg_p(z)$ em lugar de $\arg(z)$, temos a função $\ln_p(z) := \ln(|z|) + i\arg_p(z)$ a qual é chamada de valor principal do logaritmo. Vejamos que $e^{\ln(z)} = z$ mas $\ln(e^z)$ não necessáriamente da z. Da definição temos que

$$\begin{aligned} e^{\ln(z)} &= e^{\ln(|z|)+i\arg(z)} \\ &= e^{\ln(|z|)} e^{i\arg(z)} \\ &= |z|e^{i\arg(z)} = z \end{aligned}$$

Por outro lado para $z = x + iy$ temos que

$$\begin{aligned} \ln(e^z) &= \ln(|e^z|) + i\arg(e^z) \\ &= \ln(e^x) + i\arg(e^x e^{iy}) \\ &= x + i(y + 2k\pi) \\ &= z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. Seja $w \in \mathbb{C}$ fixo. definimos a função potencial

$$z^w := e^{w \ln(z)}$$

Que motivou esta definição? Justificativa: Propriedades de Exponencial e Logaritmo

$$
\begin{aligned}
z^w &= e^{\ln(z^w)} \\
&= e^{w\ln(z)}
\end{aligned}
$$

Observe que esta função também é multivaluada. Se considerarmos $\ln_p(z)$ em lugar $\ln_p(z)$ então $(z^w)_p := e^{w\ln_p(z)}$ é unívocamente determinado e é chamado valor principal de z^w. Observe que $(e^z)^w$ não necessáriamente coincide com e^{zw}, pois usando a definição temos

$$(e^z)^w = e^{w\ln(e^z)} = e^{w(z+2k\pi i)} = e^{zw}e^{w2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercícios:

1. Resolva os seguintes items

   (a) Mostre que $e^{z+w} = e^z e^w$.

   (b) Mostre que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

   (c) Mostre que e^z é real se e somente se $\mathrm{Im}(z) = n\pi$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

   (d) Mostre que e^z é imaginário puro se e somente se $\mathrm{Im}(z) = n\pi + \pi/2$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

   (e) Mostre que $e^z = e^w$ se e somente se $w = z + 2\pi n i$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

   (f) Mostre que $|e^z| = e^x$ onde $z = x + iy$.

   (g) Examine $\lim\limits_{\mathrm{Re}(z)\to\infty} e^{-z}$.

   (h) Mostre que todas as soluções de $e^{z^2} = 1$ são da forma $z = \pm(\sqrt{n\pi} + i\sqrt{n\pi})$ onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

2. Mostre as seguintes identidades

   (a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

   (b) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

   (c) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

   (d) $\sin(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$

(e) $\cosh(z) = \cos(iz), \quad \sinh(z) = -i\sin(iz)$

(f) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

(g) $\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$

(h) $\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$

(i) Prove que as funções $\cos(z)$ e $\sin(z)$ não são limitadas.

(j) $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w), \quad \ln(z/w) = \ln(z) - \ln(w)$

(k) $\ln(z^n) = n\ln(z)$ onde $n \in \mathbb{N}$

3 Noções topológicas no plano complexo

Definimos a distância entre dois números complexos z, w como sendo

$$d(z, w) := |z - w|$$

Propriedades:

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$ (positividade) e $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ (Simetria)
3. $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ (Desigualdade triangular)

notações:

$$\begin{aligned}
B_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} && \text{(Bola aberta de raio } r \text{ e centro } z_0) \\
\bar{B}_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} && \text{(Bola fechada de raio } r \text{ e centro } z_0) \\
S_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} && \text{(Círcunferencia de raio } r \text{ e centro } z_0)
\end{aligned}$$

Definition 3.1 *Dizemos que z_0 é um ponto interior do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z_0) \subset \Omega$. Denotaremos*

$$int(\Omega) := \{\textit{pontos interiores de } \Omega\} \quad \textit{Obs:} \quad int(\Omega) \subset \Omega$$

Dizemos que Ω é aberto se $\Omega = int(\Omega)$

Exemplo $\Omega = B_r(z_0)$ *é aberto*

Seja $z_1 \in \Omega$ devemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z_1) \subset \Omega$. O gráfico indica que debemos tomar como máximo $\epsilon = r - |z_1 - z_0|$. Assim

$$\begin{aligned} w \in B_\epsilon(z_1) &\Leftrightarrow |w - z_1| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |w - z_1| < r - |z_1 - z_0| \\ &\Leftrightarrow |w - z_1| + |z_1 - z_0| < r \\ &\Rightarrow |w - z_0| < r \\ &\Rightarrow w \in \Omega \end{aligned}$$

Definition 3.2 *Dizemos que z_0 é um ponto de aderencia do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega \neq \emptyset$. Denotaremos*

$$\bar{\Omega} := \{\text{pontos de aderencia de } \Omega\} \quad \text{Obs:} \quad \Omega \subset \bar{\Omega}$$

Dizemos que Ω é fechado se $\Omega = \bar{\Omega}$

Exemplo $\Omega = \bar{B}_r(z_0)$ *é fechado*

Definition 3.3 *Dizemos que z_0 é um ponto de fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $B_\epsilon(z_0) \cap (\mathbb{C} - \Omega) \neq \emptyset$. Denotaremos*

$$\partial\Omega := \{\text{pontos de fronteira de } \Omega\} \quad \text{Obs:} \quad \begin{cases} \partial\Omega \subset \bar{\Omega} \\ \partial\Omega \subset \overline{\mathbb{C} - \Omega} \end{cases}$$

Exemplo *Se $\Omega = B_r(z_0)$ então $\partial\Omega = S_r(z_0)$*

Theorem 3.4 *As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. *Ω é fechado se e somente se $\partial\Omega \subset \Omega$*
2. *Ω é aberto se e somente se $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$*

Definition 3.5 *Dizemos que z_0 é um ponto de acumulação do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(B_\epsilon(z_0) - \{z_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$*

Exemplo *$z_0 = 0$ é um ponto de acumulação de $\Omega =]0, 1] \subset \mathbb{C}$.*

Theorem 3.6 *z_0 é um ponto de acumulação do conjunto Ω se e somente se $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$ tem infinitos pontos*

Proof: *Tomamos* $\epsilon_1 = \epsilon$, *como* $(B_{\epsilon_1}(z_0) - \{z_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$ *então existe* $z_1 \neq z_0$ *tal que* $z_1 \in B_{\epsilon_1}(z_0) \cap \Omega = B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$. *Agora tomamos* $\epsilon_2 = |z_1 - z_0|$, *como* $(B_{\epsilon_2}(z_0) - \{z_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$ *então existe* $z_2 \neq z_0$ *tal que* $z_2 \in B_{\epsilon_2}(z_0) \cap \Omega \subset B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$. *Assim podemos tomar indutivamente uma sequência de pontos* $z_n \neq z_0$ *tal que* $z_n \in B_{\epsilon_n}(z_0) \cap \Omega \subset B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$ $(\epsilon_n = |z_{n-1} - z_0|)$. *Assim* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$ *é um conjunto infinito contido em* $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$.
□

Definition 3.7 *Dizemos que* z_0 *é um ponto isolado de* Ω *se existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega = \{z_0\}$. *Dizemos tambem que* Ω *é discreto se todos os seus pontos são isolados.*

Exemplo $\Omega = \{n + in : n \in \mathbb{Z}\}$ *é um conjunto discreto e* $\Omega = \{1/n + i/n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ *não é. Porque?*

Definition 3.8 *Dizemos que* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é um conjunto limitado se existe* $M > 0$ *tal que* $|z| \leq M$ *para todo* $z \in \Omega$. *(Obs:* $\Omega \subset B_M(0)$*)*

Definition 3.9 *Dizemos que* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é um conjunto compacto se for fechado é limitado.*

Exemplo *O retângunlo* $\Omega = \{z = x + iy : x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$ *é compacto*

Definition 3.10 *Dizemos que* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é um conjunto conexo se dados dos pontos* $z_1, z_2 \in \Omega$ *existe uma curva contínua contida em* Ω *que une esses dos pontos, isto é, existe* $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *contínua tal que* $\phi(a) = z_1$, $\phi(b) = z_2$ *e* $\phi(t) \in \Omega$ *para todo* $t \in [a, b]$.

Exemplo $\Omega = B_2(0) \cup B_1(4i)$ *não é conexo.*

Exercícios:

1. *Mostre que o retângulo* $\Omega = \{z = x + iy : x \in]0, a[,\ y \in]0, b[\}$ *é aberto*
2. *Mostre que* $\Omega = \{z : |z| \geq 1\}$ *é fechado*
3. *Mostre que* $\Omega = \{i/n : n \in \mathbb{N}\}$ *é discreto*
4. *Mostre que* $\Omega = \{z = re^{i\theta} : r \in [0, 1],\ \theta \in [0, \pi/4]\}$ *é compacto*
5. *Mostre que* $\Omega = B_1(-1) \cup \bar{B}_1(1)$ *é conexo*

3.1 Limites e continuidade

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ fixado e $f(z)$ uma função complexa definida pelo menos em $B_r(z_0) - \{z_0\}$ para algum $r > 0$.

Definition 3.11 *Dizemos que o limite de $f(z)$, quando z se aproxima de z_0, é $w_0 \in \mathbb{C}$ e denotamos*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

se para $\epsilon > 0$ dado é possível determinar $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ tal que se

$$\underbrace{0 < |z - z_0| < \delta}_{z \in (B_\delta(z_0) - \{z_0\})} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(z) - w_0| < \epsilon}_{f(z) \in B_\epsilon(w_0)}$$

Exemplo *Consideremos a função $f(z) = z^2 + 1$, calculemos o limite desta função quando z tende para i:*

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} (z^2 + 1) = i^2 + 1 = 0.$$

Como a única forma de provar que 0 é o limite de $f(z)$ quando z tende para i, é atravéz da definição, verifiquemos que o cálculo feito está certo

$$|z^2 + 1 - 0| = |z^2 + 1| = |z^2 - i^2| = |z + 1||z - i| \leq (|z| + 1)|z - i|$$

se $z \in B_1(i)$ então $|z| \leq |z - i| + |i| < 1 + 1 = 2$. Substituindo na desigualdade anterior temos

$$|z^2 + 1 - 0| < 3|z - i|$$

Logo para $\epsilon > 0$ fixado encontramos $\delta = \min\{\epsilon/3, 1\}$ tal que se

$$0 < |z - i| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - 0| < \epsilon$$

Propriedades do limite:

1. *O limite é único*
2. $\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z)$
3. $\lim_{z \to z_0} [f(z) g(z)] = \left[\lim_{z \to z_0} f(z)\right] \left[\lim_{z \to z_0} g(z)\right]$

4. $\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{[\lim_{z\to z_0} f(z)]}{[\lim_{z\to z_0} g(z)]}$, *desde que* $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$

Exemplo *Determine se* $f(z) = \bar{z}/|z|$ *tem limite quando* $z \to 0$*. Tomemos complexos da forma* $z = x + i0$ *então* $z \to 0$ *se e somente se* $x \to 0$*, assim*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0} \frac{x - 0i}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$$

Daí obtemos valores diferentes quando x *se aproxima de* 0 *por valores positivos e negativos, portanto o limite não existe pois o limite é único. Observe também que, se nos aproximarmos por complexos da forma* $z = 0 + iy$*, temos que*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} \frac{0 - yi}{\sqrt{0^2+y^2}} = \lim_{y\to 0}\frac{yi}{|y|}$$

e novamente encontramos valores diferentes dos anteriores para o limite quando y *se aproxima de* 0 *por valores positivos e negativos.*

Theorem 3.12 *Se* $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ *e* $g(z)$ *é uma função limitada numa vizinhança de* z_0 *então*

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = 0$$

Exemplo *temos que* $lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = 0$*, pois tem-se que*

$$\frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \bar{z}\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}$$

sendo que $\lim_{z\to 0}\bar{z} = 0$ *e* $g(z) = \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}$ *é limitada numa vizinhança de* 0*.*

Theorem 3.13 *Sejam* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$*,* $z_0 = x_0 + iy_0$ *e* $w_0 = a + ib$ *então*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$$

Proof*:* *(*$\Rightarrow$*): obtem-se a partir das desigualdades*

$$|u(x,y) - a| \leq |f(z) - w_0|$$
$$|v(x,y) - b| \leq |f(z) - w_0|$$

($\Leftarrow$*): Obtem-se a partir das desigualdade*

$$|f(z) - w_0| \leq |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b|$$

$\square$

Definition 3.14 *Dizemos que a função $f(z)$ é contínua em z_0 se $f(z)$ é definida também em z_0 e*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Exemplo *A função $f(z) = z^{27} + 1$ se $z \neq i$ e $f(i) = i + 1$ não é contínua em i pois*

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}(z^{27} + 1) = i^{27} + 1 = (i^2)^{13} i + 1 = -i + 1 \neq f(i).$$

Agora a função $f(z) = z^3/(\bar{z}|z|)$ se $z \neq 0$ e $f(0) = 0$ é contínua em 0, pois do teorema ?

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z^2}{\bar{z}|z|} = 0 = f(0).$$

Propriedades analogas a de limites podem ser estabilecidas para a continuidade, isto é, se $f(z)$ e $g(z)$ são contínuas em z_0 então $f(z) \pm g(z)$ e $f(z)g(z)$ são contínuas em z_0 e $f(z)/g(z)$ também é contínua em z_0 desde que $g(z_0) \neq 0$. Além disso, decorre do teorema ? que $f(z)$ é contínua em z_0 se e somente se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0), onde $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Exemplo *São funções contínuas em todo $z \in \mathbb{C}$:*

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = e^{\bar{z}}, \quad f(z) = Im(z), \quad f(z) = \frac{1}{|z| - i},$$

pois as partes reais $u(x, y)$ e imaginárias $v(x, y)$ de cada uma de essa funções são contínuas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo *A função $arg_p(z)$ definida em $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ é discontínua nos pontos $z = -r$ com $r > 0$. De fato, seja $z_n = re^{i(-\pi+1/n)}$, pontos da semicircunferencia inferior de raio r, claramente $z_n \to -r$ quando $n \to \infty$ e*

$$\lim_{n\to\infty} arg_p(z_n) = \lim_{n\to\infty} -\pi + \frac{1}{n} = -\pi \neq arg_p(-r) = \pi,$$

portanto a função não é contínua em $-r$. Mais ainda, observe que se consideramos $w_n = re^{i(\pi-1/n)}$, pontos da semicircunferencia superior de raio r, claramente $w_n \to -r$ quando $n \to \infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} arg_p(w_n) = \lim_{n\to\infty} \pi - \frac{1}{n} = \pi,$$

Isto é, não existe $\lim_{z\to -r} arg_p(z)$ pois ao aproximarmos de $-r$ por caminhos diferentes obtivemos limites diferentes.

Exercícios:

1. *Determine se existem os seguintes limites*

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2},\quad \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\bar{z}},\quad \lim_{z\to 0}\frac{Re(z)}{\bar{z}},\quad \lim_{z\to 0}\frac{[Im(z)]^2}{z}$$

2. *Determine se as seguintes funções são contínuas em* $z_0 = 0$

   (a) $f(z) = \bar{z}^2/|z|^2$ *se* $z \neq 0$ *e* $f(0) = 0$.

   (b) $f(z) = [\sin(x)y]/x + i[1-\cos(y)]/y$ *se* $z \neq 0$ *e* $f(0) = i$.

   (c) $f(z) = (e^z - 1)/z$ *se* $z \neq 0$ *e* $f(0) = 1$.

3. *Determine se a função* $f(z) = \ln_p(z)$ *é contínua em* $z_0 = -r$ *onde* $r > 0$.

4. *Seja* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $f(z+w) = f(z)f(w)$ *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$. *Mostre que*

   (a) $f(0) = 1, \quad f(-z) = 1/f(z), \quad f(z-w) - 1 = (f(z) - f(w))/f(w)$

   (b) *se* $f(z)$ *é contínua em* $z = 0$ *então é contínua em qualquer ponto.*

3.2 Funções Analíticas

Uma função complexa $f(z)$ *cujo domínio contém pelo menos* $B_r(z_0)$ *para algum* $r > 0$, *é derivável em* z_0 *se existe o seguinte limite*

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{w\to 0}\frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w}.$$

Caso o limite exista será chamada derivada da função f *no ponto* z_0 *e denotada por* $f'(z_0)$, *isto é*

$$f'(z_0) = \lim_{w\to 0}\frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w}.$$

Exemplo *Vejamos que* $f(z) = z^2$ *é derivável em cada ponto do plano complexo. Seja* $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} = \frac{(z_0+w)^2 - z_0^2}{w} = 2z_0 + w$$

Portanto existe

$$f'(z_0) = \lim_{w\to 0}\frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} = 2z_0.$$

Como z_0 *foi arbitrário temos que a derivada existe para todo* $z \in \mathbb{C}$ *e* $f'(z) = 2z$.

Theorem 3.15 *Se $f(z)$ é derivável em z_0 então é contínua em z_0.*

Prova

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$$

Exemplo *$f(z) = \bar{z}$ não é derivável em nenhum ponto do plano complexo.*

$$\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \frac{\overline{z_0 + w} - \bar{z}_0}{w} = \frac{\bar{w}}{w}$$

Portanto não existe

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \lim_{w \to 0} \frac{\bar{w}}{w} \quad \textit{qualquer que seja} \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

pois tem limites diferentes em caminhos da forma $w = \alpha + 0i$ e $w = 0 + i\beta$ sendo que o limite devería ser único, logo não existe $f'(z_0)$ pra nenhum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$. Observe que a função é contínua em todos os seus pontos.

Definition 3.16 *Dizemos que a função $f(z)$ é analítica em z_0 se a for derivável em $B_r(z_0)$ para algum $r > 0$*

Definition 3.17 *Dizemos que a função $f(z)$ é analítica em Ω se for analítica em todos os pontos $z \in \Omega$.*

Exemplo *as seguintes funções são analíticas em $\Omega = \mathbb{C}$*

$$p(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n, \quad e^z, \quad \cos(z), \quad \sinh(z), \quad \ldots$$

Exemplo *A função $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 16}$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C} - \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ onde $z_1 = 2e^{i\pi/4}, z_2 = 2e^{i3\pi/4}, z_3 = 2e^{-i\pi/4}, z_4 = 2e^{-i3\pi/4}$ são os 4 pontos onde ela não está definida.*

3.3 Equações de Cauchy-Riemann

Nesta seção mostraremos que a parte real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$ de uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfazem certas equações conhecidas como "Equações de Cauchy-Riemann". Também veremos que tais equações são suficientes para determinar a analiticidade de uma função complexa.

Se $z_0 = x_0 + iy_0$*,* $w = \alpha + i\beta$ *e* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *temos que*

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} &= \frac{u(x_0+\alpha, y_0+\beta) - u(x_0,y_0)}{\alpha+i\beta} \\ &\quad + i\frac{v(x_0+\alpha, y_0+\beta) - v(x_0,y_0)}{\alpha+i\beta} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Supondo que $f(z)$ *é derivável em* z_0*, vejamos que acontece com esse limite se nos aproximarmos de* 0 *pelo seguinte caminho* $w = \alpha + i0$*. Usando (3.4) temos que*

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \left[\frac{u(x_0+\alpha, y_0) - u(x_0,y_0)}{\alpha} + i\frac{v(x_0+\alpha, y_0) - v(x_0,y_0)}{\alpha} \right] \\ &= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora se considerarmos o caminho $w = 0 + i\beta$ *teremos*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} \\ &= \lim_{\beta\to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0+\beta) - u(x_0,y_0)}{i\beta} + i\frac{v(x_0, y_0+\beta) - v(x_0,y_0)}{i\beta} \right] \\ &= \frac{1}{i} u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0) \\ &= -iu_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dado que o limite é único, segue de (3.5)-(3.6) que

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0), \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Portanto, se $f(z)$ *é derivável em* $z = x + iy$*, então satisfaz as equações*

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y), \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y). \end{aligned}$$

que são conhecidas como, Equações de Cauchy-Riemann.

Theorem 3.18 *Se* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *é analítica em* Ω *então* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *satisfazem as equações de Cauchy Riemann para todo* $(x,y) \in \Omega$*, além disso*

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ &= v_y(x,y) - iu_y(x,y) \end{aligned}$$

O "recíproco" também é verdadeiro:

Theorem 3.19 *Sejam $u(x,y)$ e $v(x,y)$, funções contínuas com derivadas parciais contínuas para todo $(x,y) \in \Omega$ onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}^2$). Logo, se estas funções satisfazem as equações de Cauchy Riemann para todo $(x,y) \in \Omega$, então a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é análitica em Ω.*

Exemplo *Vejamos que $f(z) = z^2$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C}$ e que $f'(z) = 2z$. de fato,*

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)},$$

logo as funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ são funções contínuas com derivadas também contínuas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, além disso

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y),$$

isto é, satisfazem as Equações de Cauchy Riemann para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto $f(z)$ é analitica em $\mathbb{C}$. Além disso

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv(x,y) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z.$$

Exemplo *A função $f(z) = Re(z)$ nao é analítica em nenhum ponto. De fato, se $z = x+iy$, então $f(z) = x$. Assim, $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = 0$ os quais são funções contínuas com derivadas contínuas, mas, não satisfazem as equações de Cauchy Riemann em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.*

Exemplo *A função $f(z) = |z|^2$ não é analítica em nenhum ponto, pois sua parte real $u(x,y) = x^2 + y^2$ e imaginária $v(x,y) = 0$ embora sejam funções contínuas com derivadas contínuas, as equações de Cauchy Riemann somente são satisfeitas para $z = 0$, logo $f(z)$ no máximo poderia ser analítica em 0, mas seria necessário que função seja derivável numa vizinhança de 0 o que não válido, pois as equações de Cauchy Riemann não são satisfeitas nessa vizinhança. portanto a função não é analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.*

3.4 Forma polar das equações de Cauchy-Riemann

Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função complexa, determinaremos as equações de Cauchy Riemann na forma polar. Escrevendo z na forma polar

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta),$$

temos que

$$x = \underbrace{r\cos(\theta)}_{=x(r,\theta)}, \quad y = \underbrace{r\sin(\theta)}_{=y(r,\theta)}.$$

Assim a parte real e imaginária de $f(z)$ *pode ser escrita em função de* (r, θ), *isto é*

$$u(r, \theta) = u(x(r, \theta), y(r, \theta)), \quad v(r, \theta) = v(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

e desta forma $f(z)$ *pode ser escrita da forma* $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. *Vejamos quais seriam as equações de Cauchy Riemann em relação as coordenadas* (r, θ). *Usando a regra da cadeia temos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r\sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r\cos(\theta).$$

Agora usando as equações de Cauchy Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ *temos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial y} r\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial x} r\cos(\theta) \\ &= r\left[\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta)\right] \\ &= r\frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}$$

isto é

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Procedendo de de forma análoga, também podemos obter, que

$$r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

As duas equações anteriores são as equações de Cauchy-Riemann na forma polar.

Exemplo *Determinemos os pontos onde a função* $f(z) = z^5$ *é analítica. Determinemos as partes real e imaginária de função em termos de* (r, θ). *Sendo que* $z = re^{i\theta}$, *temos que*

$$f(z) = r^5 e^{5\theta} = \underbrace{r^5\cos(5\theta)}_{u(r,\theta)} + i\underbrace{r^5\sin(5\theta)}_{v(r,\theta)}.$$

Claramente as funções $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ são funções contínuas com derivadas parciais contínuas, vejamos se tais funções satisfazem as equações de Cauchy Riemann:

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = 5r^5\cos(5\theta) = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad r\frac{\partial v}{\partial r} = 5r^5\sin(5\theta) = -\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Dai segue que $f(z)$ é analítica em todo o plano complexo.

3.5 Funções harmônicas

Dizemos que uma função de duas variáveis $h(x,y)$ contínua com derivadas parciais contínuas até de segunda ordem é harmônica num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \textit{para todo} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Se denotarmos com $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ ao operador laplaciano, temos que $h(x,y)$ é harmônica se

$$\Delta h(x,y) = 0 \quad \textit{para todo} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Theorem 3.20 *se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em Ω então $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções harmônicas em Ω.*

Proof*: Como $f(z)$ é analítica em Ω, temos que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy Riemann, isto é*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Derivando a primeira equação em relação a x e a segunda equação em relação a y temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

assim, somando estas equações e em vista que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ conluimos que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

□

Definition 3.21 *Duas funções harmônicas $u(x,y)$, $v(x,y)$ em Ω são ditas harmônicas conjugadas se a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em Ω.*

Pergunta: *Dada uma função $u(x,y)$ harmônica é possivel encontrar uma harmônica conjugada $v(x,y)$?*

Theorem 3.22 *Se $u(x,y)$ é harmônica em $\Omega = B_r(0)$ então é possivel determinar uma harmônica conjugada.*

Proof*: Precisamos encontrar uma função $v(x,y)$ tal que junto com $u(x,y)$ satisfaçãm as equações de Cauchy-Riemann, isto é $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. fixando x e integrando a primeira equação em relação a segunda componente temos que*

$$\begin{aligned} \int_0^y u_x(x,s)\, ds &= \int_0^y v_y(x,s)\, ds \\ &= v(x,y) - v(x,0). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \int_0^x v_x(s,0)\, ds + v(0,0) \\ &= -\int_0^x u_y(s,0)\, ds + v(0,0). \end{aligned}$$

Das equações anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^y u_x(x,s)\, ds + v(x,0) \\ &= \int_0^y u_x(x,s)\, ds - \int_0^x u_y(s,0)\, ds + v(0,0). \end{aligned}$$

Portanto as funções candidatas a ser os harmônicos conjugados de $u(x,y)$ são da forma

$$v(x,y) := \int_0^y u_x(x,s)\, ds - \int_0^x u_y(s,0)\, ds + C$$

onde C é uma constante real qualquer. Agora, basta verificar que esta função $v(x,y)$ juntamente com $u(x,y)$ satisfaçam as equações de Cauchy-Rieman em Ω para conluir que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em Ω. □

Exemplo *Determinemos um conjugado harmônico para a função harmônica $u(x,y) = x^2 - y^2$. Uma tal função $v(x,y)$ deverá satisfazer*

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

Da primeira equação, temos que

$$v(x, y) = 2xy + f(x)$$

onde $f(x)$ será determinada posteriormente. Derivando esta expressão em relação a x, temos que

$$v_x = 2y + f'(x) = -u_y = 2y$$

de onde conluimos que $f'(x) = 0$, portanto $f(x) = C$, C constante. logo, os conjugados harmônicos de $u(x, y)$ são da forma

$$v(x, y) = 2xy + C.$$

Exercicios:

1. *Usando a definição de derivada mostre que a derivada de $f(z) = 1/z$ é $f'(z) = -1/z^2$ para todo $z \neq 0$.*

2. *Determine os pontos do plano complexo onde as seguintes funções não são analíticas*

$$Re(z), \quad Im(z), \quad e^{\bar{z}}, \quad |z|^2, \quad \ln_p(z)$$

3. *Determine os pontos onde as seguintes funções são analíticas*

$$\begin{aligned} f(z) &= |z|^2 + 2izIm(z) \\ f(z) &= \frac{\bar{z}}{z|z|^2 + \bar{z}} \\ f(z) &= 2zRe(z) - |z|^2 \end{aligned}$$

4. *seja $a \in \mathbb{C}$, mostre que $f(z) = e^{az}$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C}$. Prove que $f'(z) = ae^{az}$ usando a fórmula $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y)$.*

5. *Prove que*

$$\sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z), \quad \sinh'(z) = \cosh(z), \quad \cosh'(z) = \sinh(z)$$

6. *Seja $f(z)$ definido num conexo Ω tal que $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$. Mostre que $f(z) = C$, $\forall z \in \Omega$ para alguma constante $C \in \mathbb{C}$. A conexidade é necessária?*

7. *Seja* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *analítica para todo* $z \in \Omega_1$ *tal que* $f(z) \in \Omega_2$. $\forall z \in \Omega_1$ *e* $g(w) = U(u,v) + iV(u,v)$ *analítica para todo* $w = u + iv \in \Omega_2$. *Mostre que usando as equações de Cauchy-Riemann que* $h(z) = g(f(z))$ *é analítica em* Ω_1

8. *Sejam* $u(x,y)$ *e* $v(x,y$ *funções com ate primeira derivada contínua em* $\Omega \subset \mathbb{C}$. *Prove que* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *é analítica em* ω *se e somente se* $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\forall z = x + iy \sim (x,y) \in \Omega$

9. *Seja* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *analítica em* $z = re^{i\theta}$. *Se* $u(r,\theta) = u(x,y)$ *e* $v(r,\theta) = v(x,y)$ *onde* $x = r\cos(\theta)$ *e* $y = r\sin(\theta)$ *mostre que*
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta. \end{aligned}$$
Usando estas equações mostre que $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$.

10. *Seja* $n \in \mathbb{N}$, *mostre que* $f(z) = z^n$ *é analítica em* $\Omega = \mathbb{C}$. *Usando a fórmula* $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$, *mostre que* $f'(z) = nz^{n-1}$.

11. *Mostre que* $\ln_p(z)$ *é analítica em* $\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ *onde* $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. *(Dica: Use a forma polar das Equações de Cauchy Riemann). Além disso, use a fórmula* $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$, *para mostrar que* $\ln_p'(z) = 1/z$.

12. *Encontre relações entre os coeficientes* a, b, c, d *de tal forma que as seguintes funções sejam harmônicas*
$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3, \quad u(x,y) = e^{ax}\sin(bx), \quad u(x,y) = e^{ax}\cosh(bx).$$

13. *Se* $v(x,y)$ *é um conjugado harmônico de* $u(x,y)$, *mostre que* $u(x,y)$ *é um conjugado harmônico de* $-v(x,y)$.

14. *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Verifique que a função* $u(x,y) = e^{ax}\cos(ay)$ *é harmônica em* $\Omega = \mathbb{R}^2$ *e encontre um conjugado harmônico para esta função.*

4 Integração Complexa

Definition 4.1 *Dizemos que* $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ *é uma curva de extremos* P *e* Q *se existe uma função contínua* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *tal que*
$$\mathcal{C} = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t) : t \in [a,b], \quad \gamma(a) = P, \quad \gamma(b) = Q\}$$

Neste caso $\gamma(t)$ é dita uma parametrização de $\mathcal{C}$ e a orientação da curva será aquela em que $\gamma(t)$ está sendo percorrida, isto é, de P até Q.

Por $-\mathcal{C}$ denotaremos à mesma curva anterior com a diferença que ser percorrida em sentido contrário, isto é, de Q a P, neste caso podemos parametrizar esta curva da seguinte forma

$$-\mathcal{C} = \{\gamma_1(t) = \gamma(-t) : t \in [-b, -a]\}$$

Obs:*A parametrização de uma curva não é única, por exemplo, a curva de extremos $P = 0$ e $Q = 2 + 4i$ atravéz da parábola $y = x^2$, pode ser parametrizada pelas funções*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{\gamma(t) = t + it^2 : t \in [0, 2]\} \\
\mathcal{C} &= \{\gamma_1(t) = t^2 + it^4 : t \in [0, \sqrt{2}]\} \\
\mathcal{C} &= \{\gamma_2(t) = te^t + it^2e^{2t} : t \in [0, b], \quad \textit{onde } b \textit{ é tal que } \quad be^b = 2\}
\end{aligned}$$

Definition 4.2 *Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma curva simples se alguma parametrização $\gamma(t)$ é injetiva. A curva e dita fechada se seus extremos coincidem. A curva será dita fechada simples se for fechada e a parametrização $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ for injetiva em $[a, b[$.*

Exemplo

1. *A curva $\mathcal{C} = \{\gamma(t) = \cos(t)e^{it} : t \in [0, 4\pi + \pi/2]\}$ não é simples nem fechada*

2. *A curva $\mathcal{C} = \{\gamma(t) = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ é fechada simples*

3. *A curva $\mathcal{C} = \{\gamma(t) = e^{it} : t \in [0, 4\pi]\}$ é fechada mas não é simples*

De acordo com um teorema famoso devido a Jordan, toda curva fechada simples $\mathcal{C}$ divide o plano complexo em duas regiões tendo $\mathcal{C}$ como fronteira, uma região interior, Ω, limitada e outra exterior, $\mathbb{C} - \bar{\Omega}$, ilimitada. Além disso ambas regiões são conexas, mais ainda, a região interior é conexo simples (veja definição embaixo).

Definition 4.3 *Dizemos que un conjunto conexo ω é conexo simples se o interior de toda curva fechada inscrita em Ω esta contida em Ω. Isto é, Ω é um conexo que não tem buracos.*

Definition 4.4 *Seja* $\gamma : I \to \mathbb{C}$*, onde* I *é um intervalo da reta. Dizemos que* $\gamma(t)$ *é diferenciável por partes em* I*, se for contínua e* $\gamma'(t)$ *for contínua exeto num número finito de discontinuidades* $t_1, \ldots, t_n$*, e em cada discontinuidade os limites*

$$\gamma(t_i^+) := \lim_{t \to t_i^+} \gamma(t), \quad \gamma(t_i^-) := \lim_{t \to t_i^-} \gamma(t)$$

existem.

Exemplo *A função* $\gamma(t) = t + i|t|$ *com* $t \in [-1, 1]$ *é diferenciável por partes, pois é contínua e*

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 1 - i & se \quad t \in [-1, 0[\\ 1 + i & se \quad t \in]0, 1] \end{cases}$$

sendo que é discontínua $t = 0$ *(não está definido), mas os limites* $\gamma'(0^+) = 1 + i$*,* $\gamma'(0^-) = 1 - i$ *existem*

Seja $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$*,* $t \in [a, b]$ *uma curva no plano complexo (na verdade é uma parametrização de curva, mais abusando da linguagem a chamaremos de curva). Definimos a integral de curva como sendo*

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt := \int_a^b x(t)\, dt + i \int_a^b y(t)\, dt.$$

Então são válidas as as seguintes propriedades: se $\gamma(t), \zeta(t)$ *são duas curvas definidas no intervalo* $[a, b]$ *e* c *é uma constante complexa então*

1. $\displaystyle\int_a^b \gamma(t) + \zeta(t)\, dt = \int_a^b \gamma(t)\, dt + \int_a^b \zeta(t)\, dt$
2. $\displaystyle\int_a^b c\gamma(t)\, dt = c \int_a^b \gamma(t)\, dt$
3. $\displaystyle\left| \int_a^b \gamma(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\, dt$

Prova do item 3*:*

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = re^{i\theta} \quad com \quad r \geq 0$$

então

$$\begin{aligned} r &= e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t)\, dt \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} \gamma(t)\, dt \end{aligned}$$

Tomando parte real em ambos membros temos

$$\begin{aligned} r &= \int_a^b Re\big(e^{-i\theta}\gamma(t)\big)\, dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta}\gamma(t)|\, dt \\ &\leq \int_a^b |\gamma(t)|\, dt \end{aligned}$$

isto é

$$\left|\int_a^b \gamma(t)\, dt\right| = r \leq \int_a^b |\gamma(t)|\, dt$$

4.1 Comprimento de uma curva

Seja $\mathcal{C}$ *e uma curva parametrizada por* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. *Consideremos* $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ *uma partição de* $[a,b]$ *e denotaremos com* $\|P\| := \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \ldots, m\}$. *Consideremos a poligonal de vértices* $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)$, *então o comprimento da poligonal é dado por*

$$\ell(P) := \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Obs: *Se* P *e* Q *são duas partições de* $[a,b]$ *tal que* $P \subset Q$ *então*

$$\ell(P) \leq \ell(Q)$$

Definition 4.5 *Definimos o comprimento da curva* $\mathcal{C}$ *como sendo*

$$\ell(\mathcal{C}) := \sup\{\ell(P) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

Theorem 4.6 *Se* $\mathcal{C}$ *e uma curva parametrizada por* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *diferenciável por partes, então*

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Proof: *Seja P uma partição arbitrária, consideremos $Q = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ uma partição tal que $P \subset Q$ e contêm as descontinuidades de $\gamma'(t)$ então*

$$
\begin{aligned}
\ell(P) &\leq \ell(Q) \\
&= \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\, dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt
\end{aligned}
$$

então

$$
\ell(P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \tag{4.7}
$$

Agora assumamos que $\gamma'(t)$ é contínua em $[a,b]$. Assim

$$
\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\, dt
$$

Tomando $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tal que $|\gamma'(\tau_k)| = \max\{|\gamma'(t)| : t \in [t_{k-1}, t_k]\}$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt &\leq \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k)\, dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\, dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)\big)\, dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \big(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)\big)\, dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)|\, dt \\
&\leq \ell(P) + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)|\, dt
\end{aligned}
$$

Como $\gamma'(t)$ é contínua em $[a,b]$ então é uniformemente contínua, logo dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \epsilon$ para todo t, s tal que $|t - s| < \delta$. Assim escolhendo uma partição *tal que $\|P\| < \delta$ temos que $|\tau - t| < \delta$ para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$ então $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \epsilon$. Voltando a nossa equação temos que*

$$\begin{aligned}\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt &\leq \ell(P) + \sum_{k=1}^{m} \epsilon(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq \ell(P) + \epsilon(b-a) \qquad (4.8)\end{aligned}$$

De (4.7) e (4.8) concluimos que

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \sup\{\ell(P) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\} \quad \Rightarrow \quad \ell(\mathcal{C}) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

$\square$

Definition 4.7 *Seja $\mathcal{C}$ uma curva contida em $\Omega \subset \mathbb{C}$ de extremos P e Q parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, diferenciável por partes, com extremos $z(a) = P$ e com $z(b) = Q$. Então a integral complexa de uma função complexa contínua $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ao longo de $\mathcal{C}$ no sentido de P a Q é*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_P^Q f(z)\, dz \;:=\; \int_a^b f(z(t)) z'(t)\, dt$$

Obs: *Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ então*

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (u+iv)(dx+idy) \\ &= udx - vdy + i(udy + vdx), \end{aligned}$$

isto é

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}} udx - \int_{\mathcal{C}} vdy + i\left\{\int_{\mathcal{C}} udy + \int_{\mathcal{C}} vdx\right\}.$$

Lembre que a definição de integral de linha: $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} udx = \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t)dt.$

Exemplo *Seja $\mathcal{C} = \{z(t) = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ então*

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)} z'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\, dt = 2\pi i$

2. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^n\, dz = \int_0^{2\pi} z^n(t) z'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{int} ie^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt = \left.\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right|_0^{2\pi} = 0$

independencia da parametrização: *Seja* $z_1(t)$, $t \in [a,b]$ *e suponhamos que* $t = h(s)$ *onde* $h : [c,d] \to a, b$ *é crescente sobrejetorra e com derivada contínua, denotemos con* $z_2(s) = z_1(h(s))$ *assim*

$$\mathcal{C} = \{z_1(t) : t \in [a,b]\} = \{z_2(s) : s \in [c,d]\}$$

Mostraremos que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_a^b f(z_1(t))z_1'(t)\, dt = \int_c^d f(z_2(s))z_2'(s)\, ds$$

Prova: *Fazendo a mudança de variáveis* $t = h(s)$ *temos*

$$\int_a^b f(z_1(t))z_1'(t)\, dt = \int_c^d f(z_1(h(s)))z_1'(h(s))h'(s)\, ds = \int_c^d f(z_2(s))z_2'(s)\, ds$$

Propriedades: se $f(z)$, $g(z)$ *são duas funções complexas então*

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z) + g(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz$
2. $\displaystyle k\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}} kf(z)\, dz$, *para* $k \in \mathbb{C}$
3. $\displaystyle\int_{-\mathcal{C}} f(z)\, dz = -\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$
4. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\, dz$, *para* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_2$

Seja $\mathcal{C} = \{z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [a,b]\}$, *denotaremos com*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, |dz| := \int_a^b f(z(t))|z'(t)|\, dt$$

Usando esta definição temos que

$$\int_{\mathcal{C}} |dz| = \int_a^b |z'(t)|\, dt = \ell(\mathcal{C}).$$

Theorem 4.8

$$\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz\right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\, |dz|$$

Prova:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt \\ &\leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)||dz| \end{aligned}$$

Obs: *Note que se $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$ e $\mathcal{C}$ é uma curva inscrita em Ω, então*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |f(z)|\,|dz| &\leq M \int_{\mathcal{C}} |dz| \\ &\leq M\ell(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Theorem 4.9 *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é contínua e possui uma primitiva $F : \Omega \to \mathbb{C}$, isto é $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, então para toda curva contínua e C^1 por partes de extremos P e Q tem-se*

$$\int_P^Q f(z)\,dz = F(Q) - F(P)$$

Proof: *Seja $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma paramerização contínua e C^1 por partes de uma curva de extremos $P = z(a)$ e $Q = z(b)$. Então*

$$\frac{d}{dt}[F(z(t))] = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$$

então

$$\begin{aligned} \int_P^Q f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}[F(z(t))]\,dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(Q) - F(P) \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo *A função $f(z) = 1/z$ não tem uma antiderivada em nenhum conjunto que* *contenha uma vizinhança da origem exeto a origem. Para provar isto, suponhamos o contrario: Seja $F(z)$ uma antiderivada de $f(z) = 1/z$ no conjunto Ω que contém uma vizinhança da origem exeto a origem, consideremos a curva $\mathcal{C} = \{re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ com $r > 0$ pequeno de tal forma que $\mathcal{C} \subset \otimes$. Então, pelo teorema anterior deveriamos ter*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = F(e^{i\cdot 2\pi}) - F(e^{i\cdot 0}) = F(1) - F(1) = 0$$

Mas, se usamos a definição de integral teremos

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\, t = 2\pi i,$$

A qual contradiz o fato de $1/z$ ter uma antiderivada numa vizinhança da origem.

Obs: $\ln_p(z)$ *é uma antiderivada de $1/z$ no conjunto $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.*

Exercícios

1. *Determine uma parametrização de cada uma das seguintes curvas*
   (a) *Segmento de Reta de extremos $P = 0$ e $Q = 2 + i$.*
   (b) *Segmento de Reta de extremos $P = -1 + 2i$ e $Q = 1 + i$.*
   (c) *A circunferência de centro $1 - i$ e raio 2.*
   (d) *O pedaço de parábola $y = x^2 + 1$ de extremos $P = -1 + 2i$ e $Q = 2 + 5i$.*
   (e) *A elipse $2(x - 1)^2 + 3y^2 = 6$.*
   (f) *O pedaço de hipérbole $y = 2 + 1/x$ de extremos $P = 1 + 3i$ e $Q = 2 + (5/2)i$.*
2. *Determine que curvas $F(x, y) = 0$ representam cada uma das seguintes parametrizações*
   (a) $z(t) = i + (2 - i)t, \quad 1 \leq t \leq 3.$
   (b) $z(t) = i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$
   (c) $z(t) = t^{20} + it^{40}, \quad -1 \leq t \leq 2.$
3. *Calcule* $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$ *onde*
   (a) $f(z) = \sin(z)$, *$\mathcal{C}$= segmento de reta de $P = 0$ a $Q = i$.*
   (b) $f(z) = e^z$, *$\mathcal{C}$= circunferência unitária no sentido antihorário.*
   (c) $f(z) = z^2$, *$\mathcal{C}$= parábola $y = x^2$ de $P = 0$ a $Q = 1 + i$.*
   (d) $f(z) = z$, *$\mathcal{C}$= os lados do triângulo de vértices $0, 1, i$ no sentido antihorário.*

4. Seja $\mathcal{C} = S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ orientado em sentido antihorário, mostre que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & se \quad n = 1 \\ 0 & se \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \bar{z}\, dz$, de $P = 0$ a $Q = 1 + i$, atravéz da curva

(a) Reta $y = x$

(b) Parábola $y = x^2$

As integrais coincidem?

6. Calcule $\int_{\mathcal{C}} |z|^2\, dz$ onde $\mathcal{C}$ é uma das seguinte curvas

(a) $\mathcal{C}_1$ = Segmento de Reta de 0 a 2 e segmento de Reta de 2 a $2 + i$,

(b) $\mathcal{C}_2$ = Segmento de Reta de 0 a i e segmento de Reta de i a $2 + i$.

As integrais coincidem?

7. Calcule as seguintes integrais

$$\int_0^{\pi i/2} z\cos(z)\, dz, \quad \int_{\sqrt{\pi} i}^{2\sqrt{\pi}} z\sin(z^2)\, dz, \quad \int_{1-\pi i}^{1+\pi i} \cosh(z)\, dz.$$

5 Os teoremas de Cauchy

Nesta seção abordaremos alguns dos resultados mais importantes da integração de funções analíticas formuladas por Cauchy[1], a qual tem aplicações sorprendentes no aspecto teórico e prático. Antes de enunciar tais resultados recordemos um dos teoremas mas importantes do cálculo de funções de várias variáves conhecido como: o Teorema de Green ou teorema da divergência no plano:

Theorem 5.1 (Teorema de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abeto e conexo simples e sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções com derivadas parciasi contínuas ate de primeira ordem em Ω. Então para qualquer curva fechada simples $\mathcal{C}$ inscrita em Ω temos*

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dxdy = \int_{\mathcal{C}} (P\, dx + Q\, dy)$$

sendo que R é a região interior a $\mathcal{C}$ e a curva é percorrida no sentido antihorário.

[1]matemático ...

Theorem 5.2 *Seja $f(z)$ analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples. Então*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$$

para qualquer curva fechada simples iscrita em Ω.

Proof*: Assumiremos que $f'(z)$ é contínua. O caso sem esa hipótese foi mostrado por Goursat cuja demonstração é mais complexa. Seja $z(t) = x(t) + iy(t)$ a parametrização de C. escrevemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. desde que $f'(z)$ é contínua as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuim derivadas parciais contínuas de primeira ordem. Agora*

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (u + iv)(dx + idy) \\ &= (udx - vdy) + i(vdx + udy) \end{aligned}$$

então pelo Teorema de Green temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz &= \int_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \int_{\mathcal{C}} (vdx + udy) \\ &= \int_R \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0} dxdy + i \int_R \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dxdy \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Exemplo *Consideremos as circunferências $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorridas no sentido antihorário. Então aplicando o teorema de Cauchy*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z} = 0,$$

pois $\mathcal{C}_1$ esta inscrita numa região conexa simples onde $1/z$ é analítica. Por outro lado, não podemos aplicar o teorema de Cauchy para calcular a integral na curva $\mathcal{C}_2$ pois a curva não esta inscrita em nenhum conjunto conexo simples onde a função $1/z$ é analítica. Usando a definição de integral podemos encontrar que

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Corollary 5.3 *Se $f(z)$ é analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples então a integral de $f(z)$ numa curva contida em Ω de extremos z_0 e z so depende desses pontos e não da curva.*

Proof: *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas curvas simples diferentes que coincidem nos extremos z_0, z então, se consideramos a curva fechada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)$, pelo teorema de Cauchy tem-se*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz + \int_{-\mathcal{C}_2} f(z)\, dz \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz - \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\, dz \end{aligned}$$

isto é

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\, dz$$

□

Exemplo *Considere $\mathcal{C}_1$ uma curva poligonal que inicia no ponto 1, passa pelo pontos $1+2i$, $-1+3i$ ate o ponto -1. Calculemos $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z}$. Consideremos a curva $\mathcal{C}_2 = \{z(t) = e^{it} : 0 \leq t \leq \pi$, então, as curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tem os mesmos extremos iniciais e finais e estão dentro de um mesmo conjunto conexo simples onde a função $1/z$ é analítica, por tanto pelo corolário anterior tem-se*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z} = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = i\pi.$$

Observe que a curva $\mathcal{C}_3 = \{z(t) = e^{-it} : 0 \leq t \leq \pi$ tem os mesmos extremos iniciais e finais que $\mathcal{C}_1$, mas neste caso não pode ser usado o Corolário anterior, pois ambas curvas não estão dentro de algum conjunto conexo simples onde $1/z$ seja analítica.

Theorem 5.4 (Teorema de cauchy em abertos multiplemente conexos) *Seja Ω um conjunto aberto que contém as curvas fechadas simples $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ orientadas no mesmo sentido talque $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ estão no interior de $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$ são exteriores um ao outro para todo $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Se $f(z)$ é analítica em Ω que contém o interior de $\mathcal{C}_0$ exeto talvez em regiões Ω_i interiores a $\mathcal{C}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ então*

$$\int_{\mathcal{C}_0} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{\mathcal{C}_n} f(z)\, dz$$

Exemplo *Seja $\mathcal{C}$ uma curva fechada simples que envolve a origem então*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i,$$

sendo que a curva é percorrida no sentido antihorário. De fato, Considerando a curva $\mathcal{C}_1 = \{z(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$ con $r > 0$ de tal forma que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$ não se intesetem, pelo teorema de Cauchy para conexos multiples temos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)} z'(t) dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$$

Exemplo *Seja $\mathcal{C}$ uma curva fechada simples que envolve os pontos $\pm i$ então*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{2z}{z^2+1}\, dz = 4\pi i,$$

sendo que a curva é percorrida no sentido antihorário. De fato, Considerando a curva $\mathcal{C}_1 = \{z_1(t) = i + r_1 e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$, $\mathcal{C}_2 = \{z_2(t) = -i + r_2 e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$ con $r_1, r_2 > 0$ pequenos de tal forma que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ não se intesetem, pelo teorema de Cauchy para conexos multiples temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{2z}{z^2+1}\, dz &= \int_{\mathcal{C}_1} \frac{2z}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{2z}{z^2+1}\, dz \\
&= \int_{\mathcal{C}_1} \left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right) dz + \int_{\mathcal{C}_2} \left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right) dz \\
&= \underbrace{\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z-i}}_{=2\pi i} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z+i}}_{=0} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z-i}}_{=0} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z+i}}_{=2\pi i}
\end{aligned}$$

Theorem 5.5 *Seja $f(z)$ analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples, então qualquer primitiva desta função é dado por*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw + C, \quad \forall z \in \Omega \tag{5.9}$$

onde $z_0 \in \Omega$ é fixado e C é uma constante.

Proof*: Primeiro vejamos que $F(z)$ dado por (5.9) é uma primitiva de f(z). Seja $z \in \Omega$ então*

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_0}^{z+h} f(w)\, dw - \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw \right\} \\
&= \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(w)\, dw
\end{aligned}$$

Exercicio: se $g(z)$ analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples e $z_0 \in \Omega$ mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} g(w)\, dw = g(z_0)$$

Dai segue que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \quad = \quad f(z)$$

Portanto $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$. *Seja agora* $F(z)$ *uma primitiva qualquer de* $f(z)$ *mostraremos que* $F(z)$ *é da forma (5.9). consideremos*

$$G(z) = F(z) - \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw$$

então

$$G'(z) = F'(z) - f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$$

Então $G(z) = C$, $\forall z \in \Omega$ *para alguma constante* $C \in \mathbb{C}$. *Portanto*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw + C, \quad \forall z \in \Omega$$

□

Exemplo *Calcule uma primitiva de* $f(z) = z$. *Usando o teorema anterior qualquer primitiva dessa função é dada por*

$$F(z) = \int_0^z w\, dw + C$$

usando a parametrização $w(t) = zt$ *com* $t \in [0,1]$ *da reta que une a origem com* z *temos que*

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 w(t)w'(t)\, dt + C \\ &= z^2 \int_0^1 t^2\, dt + C \\ &= \frac{z^2}{2} + C \end{aligned}$$

Exercícios:

1. *Seja* $\mathcal{C}$ *a circunferência unitária de centro na origem. Calcule a integral* $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$, *sendo que a curva é percorrida no sentido antihorário. Use o teorema de Cauchy nos casos que seja possível.*

$$f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = e^{z^2}, \quad f(z) = \frac{1-z}{z^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+4}, \quad f(z) = \ln_p(z).$$

2. Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de raio $3/2$ e centro na origem. Calcule as seguintes integrais considerando que a curva é percorrida no sentido antihorário

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^2+2z}\, dz, \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{z^2+z+4}{z^3+4z}\, dz.$$

Dica: Decomponha o integrando em frações parciais e calcule cada uma das integrais resultantes.

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo simples. Mostre que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$$

para toda curva $\mathcal{C}$ fechada simples inscrita em Ω se e somente se

$$\int_P^Q f(z)\, dz := \text{integral em uma curva de extremos } P \text{ e } Q$$

depende somente de os extremos P e Q e não da curva.

4. (i) seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $t_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} g(s)\, ds = g(t_0)$$

(ii) seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto conexo simples, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $z_0 \in \Omega$. Mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} g(w)\, dw = g(z_0)$$

Theorem 5.6 (Fórmula integral de Cauchy) *Seja $f(z)$ analítica em Ω aberto e conexo simples. Então, para qualquer curva fechada simples $\mathcal{C}$ inscrita em Ω e z_0 um ponto interior a $\mathcal{C}$ tem-se*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$

sendo que a curva é percorrida em sentido antihorário.

Proof*:* *Consideremos $\mathcal{C}_r = S_r(z_0)$ com $0 < r < r_0$ positivo tal que $\mathcal{C}_{r_0}$ esteja no interior de $\mathcal{C}$. Então, pelo teorema de Cauchy para multiplemente conexos, temos que*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz &= \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \\
&= f(z_0) \int_{\mathcal{C}_r} \frac{1}{z-z_0}\, dz + \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \\
&= f(z_0) 2\pi i + \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz
\end{aligned}$$

para qualquer $0 < r < r_0$. *Cosideremos agora a função*

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & se \quad z \neq 0 \\ f'(z_0) & se \quad z = z_0 \end{cases}$$

então $F(z)$ *é contínua em* Ω, *por tanto* $|F(z)| \leq M$ *para todo* $z \in \bar{B}_{r_0}(z_0)$. *Agora*

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| &= \left| \int_{\mathcal{C}_r} F(z)\, dz \right| \\ &\leq \int_{\mathcal{C}_r} |F(z)|\, |dz| \\ &\leq 2M\pi r \end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{r \to 0} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz = 0$$

Tomando limite em ...quando $r \to 0$ *obtemos o resultado desejado.* □

Exemplo *Consideremos as curvas fechadas simples* $\mathcal{C}_1 = \{z(t) = \pi + 3\pi e^{it}/4, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$, $\mathcal{C}_2 = \{z(t) = \pi + \pi e^{it}/3, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$, *calculemos*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\sin(z)}{z-\pi/2}\, dz, \quad \int_{\mathcal{C}_2} \frac{\sin(z)}{z-\pi/2}\, dz, \quad \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\sin(z)}{z-3\pi/4}\, dz, \quad \int_{\mathcal{C}_2} \frac{\sin(z)}{z-3\pi/4}\, dz.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\sin(z)}{z-\pi/2}\, dz = 2\pi i \sin(\pi/2) = 2\pi i.$$

Pelo teorema de Cauchy, tem-se que

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{\sin(z)}{z-\pi/2}\, dz = 0.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\sin(z)}{z-3\pi/4}\, dz = 2\pi i \sin(3\pi/4) = 2\pi i \sin(\pi/4) = \sqrt{2}\pi i.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{\sin(z)}{z-3\pi/4}\, dz = 2\pi i \sin(3\pi/4) = \sqrt{2}\pi i.$$

Exemplo *Vejamos como encontrar a integral de* $F(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$ *ao longo da circunferência* $\mathcal{C}$*, de centro* $i\pi/2$ *e raio* π*, no sentido antihorário. Usando a fórmula integral de Cauchy tem-se*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z/(z+i\pi)}{z-i\pi}\,dz = 2\pi i \frac{e^{i\pi}}{i\pi+i\pi} = -1.$$

obs: *A fórmula integral de cauchy fornece uma outra forma de escrever a função* $f(z)$ *da forma*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

onde $\mathcal{C}$ *é uma curva fechada simples que envolve* z*.*

Theorem 5.7 [2] *Se* $f(z)$ *é analítica num conjunto* Ω *aberto e conexo simples, então possui derivadas de todas as ordens as quais também são funções analíticas em* Ω*. Além disso*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

onde $\mathcal{C}$ *é uma curva fechada simples inscrita em Omega envolvendo* z *sendo percorrido no sentido antihorário.*

Proof*:*

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(w)\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{w-z}\right]dw \quad \textit{(se a derivada conmuta com a integral)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(w)\frac{n!}{(w-z)^{n+1}}\,dw.
\end{aligned}$$

$\square$

Obs: *Se* z_0 *é um ponto interior à curva fechada simples* $\mathcal{C}$ *e* $f(z)$ *é uma função analítica num conjunto aberto e conexo que contém* $\mathcal{C}$*, então*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

[2] Este teorema pode ser generalizado para $f(z)$ e $\mathcal{C}$ uma curva de comprimento finito não necessariamente fechada, no seguinte sentido: a função dada por $F(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ possui derivadas de todas as ordens para todo $z \notin \mathcal{C}$. Alem disso, $F^{(n)}(z) = n!\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$.

Exemplo *Consideremos $\mathcal{C}$ uma curva fechada simples que tem $z_0 = 0$ no seu interior, mostremos que*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z^2)}{z^2}\, dz = 0.$$

para toda função $f(z)$ analítica num conjunto aberto e conexo simples que contem $\mathcal{C}$. Denotando com $F(z) = f(z^2)$, claramente está função é analítica nos pontos onde $f(z)$ é analítica, alem disso $F'(z) = f'(z^2) \cdot 2z$. Aplicando o teorema anterior temos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z^2)}{z^2}\, dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{(z-0)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} F'(0) = 0.$$

Exemplo *Determinemos a integral da função $f(z) = 1/(4z^2+1)^2$ a longo da circunferência unitária $\mathcal{C}$ de centro i, percorrida no sentido antihorário.*

$$f(z) = \frac{1}{(2z-i)^2}\frac{1}{(2z+i)^2} = \frac{1/(2z+i)^2}{(2z-i)^2} = \frac{1/[4(2z+i)^2]}{(z-i/2)^2} = \frac{h(z)}{(z-i/2)^2}$$

Como a função $h(z) = 1/[4(2z+i)^2]$ é analítica num conjunto aberto e conexo que contem $\mathcal{C}$, pelo teorema anterior temos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(4z^2+1)^2}\, dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{h(z)}{(z-i/2)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} h'(i/2) = \frac{2\pi i}{1!}\left(-\frac{1}{(2[i/2]+i)^3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Corollary 5.8 (Estimativa de Cauchy) *Se $f(z)$ é analítica em $\bar{B}_R(z_0)$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \bar{B}_R(z_0)$ então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proof*:*

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{S_R(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} \int_{S_R(z_0)} |dz| \\ &\leq \frac{Mn!}{R^n} \end{aligned}$$

□

Definition 5.9 *Dizemos que uma função $f(z)$ é inteira se for analítica em todo $\mathbb{C}$*

Corollary 5.10 (Teorema de Liouville) *Se $f(z)$ é uma função inteira limitada, então $f(z)$ é constante.*

Proof*: Seja $R > 0$ arbitrário, e seja $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Assim $f(z)$ é analítica em $\bar{B}_R(z)$ e limitada por M sendo que M não depende de R e z. Então pela estimativa de Cauchy temos que*

$$|f'(z)| \;=\; \frac{M}{R}$$

Tomando limite quando $R \to \infty$ tem-se que $f'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ portanto $f(z)$ é constante.
□

Exemplo *Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de grau maior ou igual que 1 possui uma raiz.*

De fato, seja $p(z)$ um polinômio de grau $n \geq 1$, isto é, $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ com $a_n \neq 0$. Suponhamos que $p(z)$ não se anula em nenhum ponto, então a função $f(z) = 1/p(z)$ é uma função inteira. Alem disso,

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}$$

de onde segue que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, logo $\epsilon = 1$ existe $R > 0$ tal que $|f(z)| < 1$ para todo $|z| > R$. Desde que $f(z)$ é analitica é contínua e portanto é limitada em $\bar{B}_R(0)$, isto é existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $|z| \leq R$, por tanto $f(z)$ é limitada. Pelo teorema de Liouville $f(z)$ é constante, isto é

$$\frac{1}{p(z)} = c \text{ (constante)}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad p(z) - \frac{1}{c} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

logo todos os coeficientes de $p(z) - 1/c$ são nulos, em particular $a_n = 0$.

Theorem 5.11 (Módulo Máximo) *Se $f(z)$ for analítica e não constante num aberto e conexo Ω então não existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in \Omega$.*

Proof*: Suponhamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in \Omega$. Seja $R > 0$ tal que $\bar{B}_R(z_0) \subset \Omega$ e seja $0 < r \leq R$ então*

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{it}\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt
\end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{|f(z_0)|-|f(z_0+re^{it})|}_{\geq 0}\ dt \leq 0$$

assim $|f(z)| = |f(z_0)|$, $\forall z \in \bar{B}_R(z_0)$. $\square$

Exercicios:

1. *Calcule a integral das funções* $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ *e* $g(z) = \dfrac{1}{z^4-1}$ *ao longo de cada uma das seguintes circunferências no sentido antihorário*

   $(a)\ |z-i| = 1, \quad (b)\ |z+i| = 1/2, \quad (c)\ |z| = 1/2, \quad (d)\ |z+1| = 1, \quad (e)\ |z| = 2.$

2. *Seja* $\mathcal{C}$ *o circunferência unitária centrada na origem. Calcule a integral da função complexa* $f(z)$ *ao longo de* $\mathcal{C}$ *no sentido antihorário onde* $f(z)$ *é uma das seguintes funções*

   $$(a)\ \frac{1}{z^2+2z+2}; \quad (b)\ \frac{z-1}{z^2+z-2}; \quad (c)\ \frac{z^4-1}{z^2+1}; \quad (d)\ \frac{e^{z^2}}{z}; \quad (e)\ \frac{\cos(z)}{z^2+2z}.$$

3. *Usando o teorema de Cauchy para domínios multiplemente conexos mostre que*

   $$(a)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2-i} = 2\pi i; \quad (b)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-2-i)^n} = 0$$

   onde $\mathcal{C}$ *é a fronteira do retangulo* $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$*. orientado no sentido antihorário.*

4. *Mostre que*

   $$(a)\ \int_0^{\sqrt{i\pi}} ze^{z^2}\, dz = -1; \quad (b)\ \int_2^i \cos(\pi z)\, dz = i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

5. *calcule a integral da função* $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$ *ao longo das circunferências no sentido antihorário*

   $(a)\ |z+1| = 1, \quad (b)\ |z-i/2| = 1, \quad (c)\ |z+i| = 1/2004.$

6. *Seja* $\mathcal{C}$ *a fronteira do quadrado, cujos lados estão sobre as retas* $x = \pm 2$, $y = \pm 2$*, orientada no sentido antihorário. Dê o valor de cada uma das seguintes integrais*

   $$(a)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{z^3+9z}\, dz; \quad (b)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{\cosh(z)}{z^4}\, dz; \quad (c)\ \int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^3+az^2}\, dz,\ (|a| > \sqrt{8})$$

7. *Dê o valor da integral da função complexa $f(z)$ ao longo da curva fechada $|z-i| = 2$ no sentido antihorário.*

$$(a)\ \frac{1}{z^2+4}; \quad (b)\ \frac{1}{(z^2+4)^2}; \quad (c)\ \frac{z+4}{(z^2-16)^2}; \quad (d)\ \frac{z^3}{(3z+1)^2}.$$

8. *Seja $\mathcal{C}$ o circulo unitário $z = e^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$, e k uma constante real qualquer, mostre primeiro que*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{kz}}{z}\, dz = 2\pi i;$$

e a seguir, escreva a integral em termos de θ para deduzir a fórmula

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos(\theta)} \cos(k\sin(\theta))\, dz = \pi$$

9. *Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica num aberto conexo limitado Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Mostre que a função harmônica $u(x,y)$ assume seu valor máximo e mínimo na fronteira de Ω e nunca num ponto interior a menos que seja constante. Dica: Considere $F(z) = e^{f(z)}$.*

10. *Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função inteira. Mostre que a função harmônica $u(x,y)$ é necessáriamente uma constante, se a mesma admite um majorante u_0, isto é, $u(x,y) \leq u_0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

6 Séries de Potências

Uma série de potências centradas em z_0 é uma série de funções da forma

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

onde a_n é uma seqüencia de numeros complexos. Estamos interesados em determinar os valores $z \in \mathbb{C}$ onde esta série converge. Por exemplo se tomamos $z = z_0$ a série toma o valor $S(z_0) = a_0$, isto é a serie converge em z_0.

Exemplo *Se $z_0 = 0$ e $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ defrontamos com a série geométrica $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, a qual foi visto anteriormente que é convergente para $|z| < 1$, mas ainda*

$$S(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \forall |z| < 1.$$

Theorem 6.1 *Suponhamos que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$*, então a série* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge absolutamente para todo z tal que* $|z-z_0| < R$ *e diverge para todo z tal que* $|z-z_0| > R$*. Além disso a série converge uniformemente em subconjuntos* $B_r(z_0)$ *qualquer que seja* $0 < r < R$*.*

Proof*:* *Usando o teste da raiz a série deve convergir absolutamente nos pontos z onde*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < 1 \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0| < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{R} \cdot |z-z_0| < 1 \\
&\Leftrightarrow |z-z_0| < R.
\end{aligned}$$

Os pontos onde a série diverge, segundo o teste da raiz, são aqueles onde $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > 1$*, isto é, onde* $|z-z_0| > R$*. Para provar a convergência uniforme, usaremos o teste de Weierstrass. Sejam* $r < r_0 < R$*, como* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ *tem-se que* $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r_0}$ *a partir de* $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$*, assim se* $z \in B_r(z_0)$ *temos que, para* $n \geq n_0$*,*

$$|a_n(z-z_0)^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0|)^n = \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

dado que $(r/r_0) < 1$ *a série numérica* $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ *converge, portanto pelo teste de Weierstrass a série* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge uniformemente em* $B_r(z_0)$*.* □

Obs: *O número positivo R do teorema anterior é chamado de raio de convergência da série, e o teorema anterior garante que o maior conjunto entre os conjuntos abertos onde a série converge é* $B_R(z_0)$ *(círculo de convergência da série). Nos pontos da circunferência* $|z-z_0| = R$ *não podemos garantir convergência ou divergência, pode acontecer que uma parte seja convergente e outra não. Uma outra forma de determinar o raio de convergência é atravez do limite*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Exemplo *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{2^n n^n}(z+i)^n$ *tem raio de convergência*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}} = 2,$$

portanto a série converge para todo $z \in B_2(-i)$.

Exemplo *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}(z-3)^n$ *tem raio de convergência*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} e^{-n}} = \infty,$$

portanto a série converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

Theorem 6.2 *Toda série de potências*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

é uma função analítica no seu círculo de convergência $|z-z_0| < R$ e sua derivada é a série cujos termos são as derivadas dos termos de $S(z)$ tendo o mesmo raio de convergência.

Proof: *A série*

$$\hat{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$$

tem raio de convergência $\hat{R}$ dado por

$$\frac{1}{\hat{R}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{|a_{n+1}|} = 1\cdot\frac{1}{R}$$

então $\hat{R} = R$. Como as somas parciais da série $S(z)$ e as respectivas derivadas destas somas finitas (somas parciais de $\hat{S}(z)$) convergem uniformemente em $\bar{B}_r(z_0)$ para qualquer $r < R$ temos que $S'(z) = \hat{S}(z)$ para todo $z \in \bar{B}_r(z_0)$, dada a arbitrariedade de r então a igualdade anterior é válida para todo $z \in B_R(z_0)$. □

Exemplo *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *é analítica no seu círculo de convergência $B_1(0)$, alem disso vimos que converge para $S(z) = 1/(1-z)$, logo*

$$S'(z) = -\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}.$$

Este exemplo nos fornece uma forma de calcular o valor de uma série derivada.

Exercícios:

1. *A partir da série geométrica* $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *para* $|z| < 1$ *Mostre que*

   (a) $\dfrac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$ *para* $|z-1| < 1$

   (b) $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ *para* $|z| < 1$

   (c) $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$ *para* $|z| < 1$

   (d) $\dfrac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ *para* $|z+1| < 1$

   (e) $\dfrac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$ *para* $0 < |z| < 4$

2. *Determine o círculo de convergência das seguintes séries*

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n; \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}(z+i)^n; \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} z^n; \quad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a^n}(iz)^n; \quad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

3. *Seja* $0 \neq a \in \mathbb{C}$ *Verifique o raio de convergência* R *das seguintes séries de potências*

$$(b)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \quad R = 1; \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad R = 1.$$

4. *Mostre que o raio de convergência da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$$

   é 1 *e estude a convergência nos pontos* $z = 1, -1, i$.

5. *Seja* $r < 1$. *Usando o M-teste de Weierstrass mostre que as seguintes séries convergem uniformemente em* $|z| \leq r$

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(3n)}{1+5n} z^n; \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3\sin(n)}{10n^2+7} z^{2n-1}$$

Theorem 6.3 (Série de Taylor) *Se* $f(z)$ *é analítica em* Ω *e* $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$ *então* $f(z)$ *pode ser representada como uma série de potências no conjunto* $B_r(z_0)$, *isto é,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in B_r(z_0).$$

Mais ainda, os coeficientes da série são calculados pela fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$$

onde a circunferência $S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ *é percorrida no sentido antihorário.*

Proof*: Seja* z *um ponto do interior da circunferência* $S_r(z_0)$*, isto é,* $z \in B_r(z_0)$*. Da fórmula integral de Cauchy, tem-se que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \tag{6.10}$$

Agora observe que para qualquer $w \in S_R(z_0)$ *temos que*

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$

A série anterior é convergente para os valores $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$ *a qual é satisfeito pois* $z \in B_r(z_0)$*. Usando esta expresão em (6.10) encontramos que*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right] f(w)\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w)\, dw\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\right](z-z_0)^n \end{aligned}$$

Justificativa para a permuta entre somatória e a integral. Raio de convergência:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w)\, dw\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{S_r(z_0)} \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}}\, |dw||z-z_0|^n \\ &\le \left[\sup_{w\in S_r(z_0)} |f(w)|\right]\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n \end{aligned}$$

assim, se $|z - z_0| < r$ *pelo M-teste de Weierstrass, a série converge uniformemente* □

Obs: *Observe que os coeficientes da série podem ser encontrados usando as derivadas de $f(z)$ avaliadas no ponto z_0 da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= a_0,\\
f'(z_0) &= a_1,\\
f''(z_0) &= 2a_2,\\
f'''(z_0) &= 3\cdot 2a_2,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(z_0) &= n(n-1)\cdots 3\cdot 2a_n,
\end{aligned}$$

isto é a_n pode ser determinada pelas fórmula

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}.$$

Usando esta observação temos uma outra alternativa para mostrar o Teorema 5.7, isto é, a fórmula:

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Exemplo *Representemos* $\cosh(z)$ *como uma série de potências centradas na origem.*

$$\begin{aligned}
\cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0)}{n!} z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(2n)}(0)}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} z^{2n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Exercicios:

1. *Desenvolva as seguintes funções na sua série de taylor em torno de* $z=0$

   (a) $f(z)=e^z$; (b) $f(z)=\sin(z)$; (c) $f(z)=\sinh(z)$; (d) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$.

2. *Desenvolva as seguintes funções na sua série de taylor em torno de* z_0

   (a) $f(z)=\cos(z)$, $z_0=\pi/2$; (b) $f(z)=\sinh(z)$, $z_0=\pi i$.

3. *Sejam* $a,b\in\mathbb{C}$ *tal que* $a\neq b$. *Mostre que*

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}, \quad \textit{para} \quad |z-b|<|a-b|$$

7 Zeros de uma função analítica

Definition 7.1 *Dizemos que uma $f(z)$ analítica em Ω tem um zero em $a \in \Omega$ se $f(a) = 0$. Neste caso dizemos que a é um ponto de zero de multiplicidade $m \in \mathbb{N}$ se existe $g(z)$ analítica em Ω tal que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ onde $g(a) \neq 0$*

Remark *Quando não existe $m \in \mathbb{N}$ dizemos que a multiplicidade de a é infinita. Por exemplo uma função identicamente nula tem multiplicidade nula em qualquer ponto. Será mostrado posteriormente que a única função analítica que tem zeros com multiplicidade infinita é a função nula.*

Theorem 7.2 (prolongação analítica) *Seja $f(z)$ analítica num aberto e conexo Ω. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $f(z) \equiv 0$;

(ii) *Existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$;*

(iii) $Z = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ *tem um ponto de acumulação em Ω.*

Proof*: É obvio que $(a) \Rightarrow (b)$ e $(a) \Rightarrow (c)$.*
$(c) \Rightarrow (b)$: Seja $z_0 \in \Omega$ um ponto de acumulação de Z, logo pela continuidade de $f(z)$ temos que $f(z_0) = 0$. Mostraremos que z_0 é o ponto que satisfaz (ii). Procedamos pelo absurdo; suponhamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$, para $n = 0, \cdots, n_0$ e $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$. como $f(z)$ pode ser expressada como uma série de potências en torno de z_0 temos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n_0+n)}(z_0)}{(n_0+n)!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^{n_0} g(z) \end{aligned}$$

para todo $z \in B_R(z_0)$ para algum $R > 0$. Note que a função $g(z)$ é analítica em $B_R(z_0)$ e satisfaz $g(z_0) = \dfrac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0$, logo por continuidade temos que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in B_r(z_0)$ para algum $0 < r < R$. Por z_0 ser ponto de acumulação de Z existe $z_r \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ tal que $0 = f(z_r) = (z_r - z_0)^{n_0} g(z_r)$ dai segue que $g(z_r) = 0$. $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: como

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

então $f(z) \equiv 0$ em $B_R(z_0)$. seja $z \in \Omega$, como ω é conexo, z e z_0 podem ser unidos por uma poligonal de vertices $z_0, z_1, \ldots, z_p = z$ cujas distâncias entre vertices são pequenas de tal forma que z_k está dentro da bola de convergência da série da função en torno de z_{k-1}. Como $z_1 \in B_R(z_0)$ então $f^{(n)}(z_1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, seguindo o mesmo raciocinio obtemos o mesmo para $z_2, \ldots z_p = z$, isto é $f(z) = 0$. Como $z \in \Omega$ foi tomado arbitrário temos que $f(z) \equiv 0$ em Ω. □

Corollary 7.3 (Unicidade da prolongação analítica) *Sejam $f(z)$, $g(z)$ analíticas num aberto e conexo Ω. Se ambas funções conincidem em $\omega \subset \Omega$ e ω tem um ponto de acumulação em Ω então necessariamente as funções coincidem em Ω*

Corollary 7.4 *O conjunto de pontos de zero de uma função analítica $f(z)$ não identicamente nula definida num aberto e conexo Ω é discreto. Além disso, a multiplicidade do ponto de zero z_0 é finita, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $g(z)$ em Ω, tal que $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ com $g(z_0) \neq 0$.*

Proof: *Seja $m \in \mathbb{N}$ o menor inteiro positivo tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, logo $f^{(n)}(z_0) = 0$ para $n = 0, 1, \ldots, m-1$. Definimos*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & se \quad z \neq z_0; \\ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} & se \quad z = z_0. \end{cases}$$

Evidentemente $g(z)$ é analítica em $\Omega - \{z_0\}$. Existe $g'(z_0)$? □

exercicio: *Usando a representação em série de $f(z)$ em torno de z_0 mostre que*

$$g'(z_0) = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}$$

Exercicios:

1. *Seja $f(z)$ analítica em z_0. Mostre que z_0 é um ponto de zero de ordem n_0 da função $f(z)$ se e somente se*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n_0-1)}(z_0) = 0, \quad e \quad f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$$

2. *Usando o teorema da prolongação analítica mostre as seguintes propriedades*

$$e^{z+z_0} = e^z e^{z_0}, \quad \sin(z+z_0) = \sin(z)\cos(z_0) + \sin(z_0)\cos(z)$$

3. *Seja Ω um aberto e conexo. $f(z)$ e $g(z)$ são funções analíticas em Ω tal que $f(z)g(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, mostre que $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.*

4. *Seja Ω um aberto e conexo. Mostre que que a função analítica $f(z)$ em Ω é um polinômio de ordem menor ou igual que m se e somente se existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$, para todo $n > m$.*

5. *Seja $f(z)$ uma função inteira tal que $|f(z)| \leq M|z|^m$, $\forall |z| > R$ para algum $M > 0$ e $R > 0$. Mostre que $f(z)$ é um polinômio de ordem menor ou igual a m.*

8 Singularidades

Definition 8.1 *Dizemos que uma função complexa $f(z)$ tem uma sigularidade isolada em z_0 se ela não for análitica em z_0 (ou não está definida nesse ponto) sendo que é análitica em $B_r(z_0) - \{z_0\}$ para algum $r > 0$. Neste caso a singularidade será do seguinte tipo:*

1. **Removível:** *Se existe $g(z)$ análitica em $B_r(z_0)$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ para algum $\epsilon > 0$;*

2. **Pólo:** *se $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$;*

3. **Singularidade essencial:** *Se não for removível nem pólo.*

Obs: *Se z_0 e uma singularidade removível de $f(z)$ então existe $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$*

Exemplo

1. $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$ *definida para todo $z \neq 0$ tem uma singularidade removível em $z = 0$. Vejamos porqué: como $\sin(0) = 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica em $\mathbb{C}$ tal que $\sin(z) = z^m g(z)$, assim $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z} = z^{m-1}g(z)$, $\forall z \neq 0$ sendo $z^{m-1}g(z)$ é analítica em todo $\mathbb{C}$.*

2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ *tem um pólo em $z = i$, pois*

$$\lim_{z \to i} |f(z)| = \lim_{z \to i} \frac{1}{|z-i||z+i|} = \infty$$

3. $f(z) = e^{1/z}$ *tem uma singularidade essencial em* $z = 0$*. Para isto vejamos que não existe* $L \in \mathbb{R}$ *ou* $L = \infty$ *tal que* $\lim_{z\to 0} |f(z)| = L$

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{R}^+}} e^{1/z} = e^{+\infty} = +\infty, \qquad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{R}^-}} e^{1/z} = e^{-\infty} = 0$$

onde $\mathbb{R}^+ = \{z = x + iy : x > 0,\ y = 0\}$ *e* $\mathbb{R}^- = \{z = x + iy : x < 0,\ y = 0\}$

Theorem 8.2 $f(z)$ *tem uma singularidade removível em* $z = z_0$ *se e somente se* $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = 0$

Proof*:* *(*$\Rightarrow$*): como tem uma singularidade removível em* $z = z_0$*, tem-se* $f(z) = g(z)$ *para todo* $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ *com* $g(z)$ *análitica em* z_0*.*

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0$$

($\Leftarrow$*): Definimos* $h(z) = (z - z_0)f(z)$ *para* $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ *e* $h(z_0) = 0$*. Se mostrarmos que* $h(z)$ *é analítica em* z_0 *pelo fato de se anular em* z_0 *teremos que* $h(z) = (z - z_0)g(z)$ *onde* $g(z)$ *é analítica em* z_0 *desta forma* $f(z) = g(z)$ *para todo* $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ *o que mostraria que* z_0 *é uma singularidade removível de* $f(z)$*. Então mostremos que* $h(z)$ *é analítica em* z_0*, para isso, faremos uso do teorema de Morera, isto é mostraremos que*

$$\int_T h(z)\ dz = 0 \tag{8.11}$$

para todo curva triangular T *inscrita em* $B_r(z_0)$*. Denotemos com* Δ *o interior do triângulo então, temos 4 posibilidades*

1. $z_0 \notin \Delta \cup T$
2. z_0 *é um vértice de* T
3. $z_0 \in T$ *é não é vértice de* T
4. $z_0 \in \Delta$

Mostremos que (8.11) no segundo caso: Seja L *o perímetro de* T *como* $h(z_0) = 0$ *para cada* $\epsilon > O$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|h(z)| < \epsilon/L$ *para todo* $z \in B_\delta(z_0)$ *Sejam* a, b *pontos de cada um dos lados do triângulo* T *adjacentes ao vértice* z_0 *de tal forma que* $a, b \in B_\delta(z_0)$ *então*

$$\left| \int_T h(z)\ dz \right| = \left| \int_{T_{ab}} h(z)\ dz \right| \le \int_{T_{ab}} |h(z)|\ |dz| \le \epsilon$$

onde T_{ab} é o triângulo de vértices $z_0,\ a,\ b$. Por ϵ ser arbitrario tem-se (8.11).

$\square$

Theorem 8.3 *Seja $z_0 \in \Omega$ onde Ω é aberto e conexo e seja $f(z)$ analítica en $\Omega - \{z_0\}$. Então, $f(z)$ tem um pólo em $z = z_0 \in \Omega$ se e somente se existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $g(z)$ em Ω tal que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ para todo $z \in \Omega - \{z_0\}$ com $g(z_0) \neq 0$*

Proof: *($\Rightarrow$): Como $f(z)$ possui um polo em $z = z_0$ então $1/f(z)$ definida em $B_R(z_0)$ possui uma singualaridade removível em z_0 logo existe uma função analítica em $B_R(z_0)$, $h_1(z)$, tal que $\dfrac{1}{f(z)} = h_1(z)$, $\forall z \in B_R(z_0) - \{z_0\}$. Verifica-se também que $h_1(z_0) = 0$ logo existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $h_2(z)$ em $B_R(z_0)$ tal que $\dfrac{1}{f(z)} = h_1(z) = (z-z_0)^m h_2(z)$, $\forall z \in B_R(z_0) - \{z_0\}$ com $h_2(z_0) \neq 0$. Da continuidade de $h_2(z)$ tem-se que $h_2(z) \neq 0$ em $B_\epsilon(z_0)$ para algum $\epsilon > 0$ pequeno. Assim $f(z) = \dfrac{1/h_2(z)}{(z-z_0)^m}$, $\forall z \in B_\epsilon(z_0) - \{z_0\}$ com $1/h_2(z)$ analítica em $B_\epsilon(z_0)$. Ahora definimos*

$$g(z) = \begin{cases} 1/h_2(z) & se \quad z \in B_\epsilon(z_0) \\ f(z)(z-z_0)^m & se \quad z \neq z_0 \end{cases}$$

Claramente a função $g(z)$ é analítica em Ω.

($\Leftarrow$): Obvio.

$\square$

Definition 8.4 *O m satisfazendo o teorema anterior é chamada a ordem do pólo $z = z_0$*

Exercicios:

1. *Determine os pontos de singularidade isolada das seguintes funções especificando a natureza de cada uma delas. Justifique sua resposta.*

$$(a)\ f(z) = \frac{z}{e^z - 1}; \quad (b)\ f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2}; \quad (c)\ f(z) = z\sin(1/z);$$
$$(d)\ f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}; \quad (d)\ f(z) = \frac{z^2+1}{z^4-1}; \quad (e)\ f(z) = \cosh(1/z).$$

2. *Demonstre que z_0 é um polo de ordem m de $f(z)$ se e somente se z_0 é for um ponto de zero de ordem m de $1/f(z)$.*

9 Séries de Laurent

Se $f(z)$ *tem um pólo de ordem* m *em* z_0*, então* $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ *para todo* $z \in B_R(z_0) - \{z_0\}$ *com* $g(z)$ *analítica em* $B_R(z_0)$ *com* $g(z_0) \neq 0$*. Como* $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$*, podemos escrever* $f(z)$ *da forma*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g_(z_0)/0!}{(z-z_0)^m} + \frac{g'(z_0)/1!}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{(z-z_0)} \\ &\quad + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \cdots \end{aligned}$$

a qual pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1}}_{Parte\ singular} \\ &\quad + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots}_{Parte\ regular} \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Definition 9.1 *Dizemos que a série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) \tag{9.12}$$

converge em $A \subset \mathbb{C}$ *se as séries*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}(z) \tag{9.13}$$

convergem em $A \subset \mathbb{C}$*. Dizemos que a serie (9.12)converge absolutamente (ou uniformente) se as séries (9.13) convergem absolutamente (ou uniformente).*

Theorem 9.2 (Série de Laurent) *Sejam* $0 \leq r < R$*. Se* $f(z)$ *é analítica em* $A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$*. Então*

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} \\ &\quad + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

para todo $z \in A(z_0, r, R)$, onde a convergência é absoluta e uniforme em $A(z_0, \alpha, \beta)$ com $r < \alpha < \beta < R$. Alem disso,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_0}(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

onde $r < r_0 < R$.

Obs1: *A série de Laurent é uma extensão da série de Taylor ao conjunto de funções com singularidades issoladas. Para verificar isto assumamos que $f(z)$ é analítica em $B_R(0)$, neste logo $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ com $n \leq -1$ também é analítica em $B_r(0)$, assim*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_0}(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw = 0, \quad \forall n \leq -1$$

portanto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Obs2: *Observe que a fórmula para o cálculo dos coeficientes a_n pode ser complicado, mas já que a série de Laurent em torno de um ponto fixado é única, podemos determinar tais coeficientes usando séries já conhecidas, como veremos nos seguintes exemplos*

Exemplo *Sabemos que $\cos(z)$ é uma função analítica em $B_r(0)$, logo pode ser expresada pela sua série de Taylor a qual coincide com sua série de Laurent em torno de 0.*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

da qual concluimos que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad e \quad a_n = 0 \quad \forall n < 0.$$

Exemplo *Sabemos que $\sin(z)/(z^2)$ não é uma função analítica em $z_0 = 0$, mas*

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

da qual concluimos que

$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{2n} = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad e \quad a_n = 0 \quad \forall n < 1.$$

Exemplo *Sabemos que* $e^{1/z}$ *não é uma função analítica em* $z_0 = 0$*, mas*

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

da qual concluimos que

$$a_{-n} = \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 0, \quad a_n = 0 \quad \forall n > 0.$$

Corollary 9.3 *Se* $z = z_0$ *é uma singularidade isolada de* $f(z)$ *e* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *é sua série de Laurent em* $A(z_0, 0, R)$*. Então*

1. $z = z_0$ *é uma singularidade removível de* $f(z)$ *se e somente se* $a_n = 0$, $\forall n \leq -1$
2. $z = z_0$ *é um pólo de ordem* m *de* $f(z)$ *se e somente se* $a_{-m} \neq 0$ *e* $a_n = 0$, $\forall n \leq -(m+1)$
3. $z = z_0$ *é uma singularidade essencial de* $f(z)$ *se e somente se* $a_n \neq 0$*, para infinitos enteros negativos*

Proof*:*

1. *Obvio*
2. $(\Rightarrow)$*: Já foi mostrado*
   $(\Leftarrow)$*: Se* $a_{-m} \neq 0$ *e* $a_n = 0$, $\forall n \leq -(m+1)$ *então*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^{n-m} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n}_{g(z)} \end{aligned}$$

como $g(z)$ *é analítica em* $B_R(z_0)$ *concluimos que* $f(z)$ *tem um polo de ordem* m *em* z_0.

3. $(\Rightarrow)$: *Seja z_0 é uma singularidade essencial e suponhamos que não existe inftinitos $a_n \neq 0$ com índices negativos então z_0 é um polo ou uma singularidade removível* $(\Rightarrow\Leftarrow)$

   $(\Leftarrow)$: *Suponhamos que há um número infinito de termos $a_n \neq 0$ con índices negativos e sumamos que z_0 não é uma singularidade esencial, então deve ser removível ou polo, por tanto o número de termos $a_n \neq 0$ con índices negativos é finito* $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\square$

Exemplos:

1. *A função $f(z) = \dfrac{\sin(z-1)}{z-1}$ tem uma sigularidade removível em $z = 1$, pois*

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{(2n+1)!}$$

2. *a função $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+i)^2}$ tem um polo de ordem 2 em $z = -i$, pois*

$$f(z) = \frac{e^{-i}}{(z+i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n!}$$

3. *a função $f(z) = z^2\cos(1/z)$ tem uma singularidade esencial em $z = 0$, pois*

$$f(z) = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1/(2n)!}{z^{2n-2}}$$

Exercicios

1. *Determine a série de Laurent das seguinte funções em torno de cada uma de suas singularidades. Especifique qual o tipo de singularidade*

$$(a)\ f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z}; \quad (b)\ f(z) = z^2\sin(1/z), \quad (c)\ f(z) = \frac{1}{z^3-z^2}.$$

10 Resíduos

Seja z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$ e consideremos a sua série de Laurent em torno de z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Definition 10.1 *O coeficiente a_{-1} é chamado de resíduo de $f(z)$ em z_0 a qual será denotada por*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) := a_{-1}$$

observação: *Da fórmula dos coeficientes na série da Laurent temos que*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_0}(z_0)} f(z)\, dz$$

Exemplo: *A função $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ tem uma singularidade isolada em 0. Determinemos o resíduo desta função em 0. Representando a função na sua série de Laurent, temos*

$$f(z) = z^2 \sin(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-1}},$$

de onde conluimos que $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \dfrac{(-1)^1}{(2\cdot 1+1)!}$.

Exemplo: *A função $f(z) = \cos(1/(z-i))$ tem uma singularidade isolada em i. Determinemos o resíduo desta função em i. Representando a função na sua série de Laurent, temos*

$$f(z) = \cos(1/(z-i)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z-i)^{2n}},$$

de onde conluimos que $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 0$.

Theorem 10.2 (Resíduo de polo simples) *Seja $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ onde $p(z)$ e $q(z)$ são analíticas em z_0 com $p(z_0) \neq 0$ e $q(z)$ tem um zero simples em z_0, então*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Proof: *Como z_0 é um zero simples de $q(z)$ então $q(z) = (z-z_0)g(z)$ com $g(z_0) = q'(z_0) \neq 0$, então*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-z_0}\frac{p(z)}{g(z)} \\ &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \end{aligned}$$

onde $h(z) = \dfrac{p(z)}{g(z)}$. *Dai segue que*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = h(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

□

exemplo *A função* $f(z) = \dfrac{z^5+1}{z^2+1}$ *tem singularidades em* $\pm i$ *e se encaixa no teorema anterior, portanto*

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{i^5+1}{2i} = \frac{1-i}{2}, \quad \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{(-i)^5+1}{2(-i)} = \frac{1+i}{2}$$

exemplo *A função* $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin(z)}$ *tem singularidades em* $\pm n\pi$ *e se encaixa no teorema anterior, portanto*

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) = \frac{e^{n\pi}}{\cos(n\pi)} = (-1)^n e^{n\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Theorem 10.3 (Resíduo de polo de qualquer ordem) *Seja* $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ *onde* $g(z)$ *é uma função analítica em* z_0 *com* $g(z_0) \neq 0$, *então*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Proof: *Desde que* $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ *temos que*

$$f(z) = \frac{g(z_0)/0!}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{(z-z_0)} + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \cdots$$

Exemplo *Determinemos os resíduos da função* $f(z) = \dfrac{1}{z^3+2iz^2-z}$ *nos seus pomtos de singularidade. A função pode ser expresada da seguinte forma* $f(z) = \dfrac{1}{z(z+i)^2}$, *logo, podemos verificar que tem um polo de ordem* 1 *em* $z=0$ *e um polo de ordem* 2 *em* $z=-i$. *Portanto,*

$$f(z) = \frac{1/(z+i)^2}{z-0} = \frac{g(z)}{z-0} \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{0!} g(0) = 1/i^2 = -1$$
$$f(z) = \frac{1/z}{(z+i)^2} = \frac{h(z)}{(z+i)^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!} h'(-i) = -1/(-i)^2 = 1$$

Exercicios:

1. *Determine a natureza dos pontos de singularidade das seguintes funções e calcule seus respectivos resíduos*

$$\begin{array}{lll} (a)\ \dfrac{\sin(z)}{z}, & (b)\ \tan(z), & (c)\ \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}, \\ (d)\ z\cos(1/z), & (e)\ \dfrac{1}{e^z-1} & (f)\ z^3\sinh(1/z^2), \\ (g)\ \dfrac{z}{(z^2+1)^2} & (h)\ \dfrac{\cos(z)}{z\sin(z)}, & (i)\ \dfrac{\csc(z)}{z^2}. \end{array}$$

Theorem 10.4 (Teorema dos Resíduos) *Seja $f(z)$ analítica num aberto e conexo Ω exceto nas singularidades isoladas $z_1, \ldots, z_m \in \Omega$. Seja $\mathcal{C}$ uma curva fechada simples contida em Ω que envolve essas singularidades, então*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{Res} f(z)$$

sendo que a curva $\mathcal{C}$ é percorrida no sentido antihorário.

Proof*: No caso que $\mathcal{C}$ envolva somente uma singularidade z_1 de $f(z)$ temos da fórmula dos coeficientes na sua série de Laurent, que*

$$\underset{z=z_1}{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$$

de onde segue que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\pi i \underset{z=z_1}{Res} f(z)$$

Para o caso geral podemos usar o teorema de Cauchy para domínios multiplemente conexos, isto é, para cada $k = 1, \ldots, m$, seja $\mathcal{C}_k$ curva simple fechada que envolvem somente a singularidade z_k sendo que essa curvas estão no interior de $\mathcal{C}$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathcal{C}_k} f(z)\, dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{Res} f(z) \end{aligned}$$

□

Exemplo *Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de raio $3/2$ centrada na origem, determinemos a integral da função $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ ao longo dessa curva no sentido antihorário.*

Esta função tem singularidades issoladas nos pontos $\pm i$ e 2, porém somente os pontos $\pm i$ estão no interior de $\mathcal{C}$, portanto

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\underset{z=i}{Res} f(z) + \underset{z=-i}{Res} f(z) \right).$$

Calculando os resíduos temos

$$\underset{z=i}{Res} f(z) = \frac{1}{(i+i)(i-2)} = \frac{-1+2i}{10}, \quad \underset{z=-i}{Res} f(z) = \frac{1}{(-i-i)(-i-2)} = \frac{-1-2i}{10},$$

portanto,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = -\frac{2\pi i}{5}.$$

Exercicios:

1. *Calcule as integrais*

$$(a) \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{4z^2+1}, \quad (b) \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

   ao longo dos círculos (a) $|z| = 2$; (b) $|z+2| = 3$, percorridos no sentido antihorário.

2. *Calcule as integrais de cada uma das seguintes funções ao longo do círculo unitário com centro na origem, percorrida no sentido antihorário.*

$$(a)\ z^{-2}e^{-z}, \quad (b)\ ze^{1/z}, \quad (c)\ z^{-2}\sin(z)(e^z - 1).$$

3. *Calcule a integral das seguintes funções ao longo dos lados do triângulo de vértices -2, $-2i$, $1+i$ percorrida no sentido antihorário.*

$$(a)\ \frac{3z^2}{(z^2-1)^2}, \quad (b)\ \frac{1}{z(z^2+1)}, \quad (c)\ \cosh(1/z), \quad (d)\ \frac{(\cos(z)-1)^2}{z^2}$$

4. *Sejam $f(z)$ uma função analítica num aberto e conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ e z_0 o único ponto de zero de $f(z)$, sendo este de ordem m. Se $\mathcal{C}$ é um curva simples fechada que envolve z_0. Mostre que*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = m,$$

   sendo que a curva é percorrida em sentido antihorário. O quociente f'/f é conhecido como derivada logarítmica de f; ele é a derivada de $\ln(f)$.

11 Cálculo de Integrais reais

O teorema dos resíduos é uma ferramenta poderosa que nos ajudara a calcular integrais de algumas funções reias complicadas de uma forma muito simples.

11.1 Integrais definídas de funções trigonométricas

O teorema dos resíduos é útil no cálculo de integrais definidas do tipo

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(\theta), \cos(\theta))\, d\theta \tag{11.14}$$

onde F *é uma função de* $\sin(\theta)$ *e* $\cos(\theta)$*. Se consideramos* θ *como sendo o argumento de* z *sobre o círculo unitário* $z = e^{i\theta}$*, podemos escrever*

$$\sin(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos(\theta) = \frac{z + z^{-1}}{2}; \quad dz = izd\theta$$

Desta forma a a integral (11.14) torna-se

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{iz} F(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2})\, dz$$

que é uma integral de uma função complexa ao logo do círculo unitário, o qual pode ser calculado pelo teorema do resíduo. Para ilustrar esta afirmação calculemos o valor da seguinte integral

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a}, \quad a > 1.$$

Note o intervalo de integração é $[0, \pi]$*, enquanto a nossa análise foi para o intervalo* $[0, 2\pi]$*. Como Coseno é uma função periódica talvez há alguma relação entre as integrais dessa função nesses intervalos. Vejamos: considerando a mudança de variáveis* $\theta = 2\pi - \sigma$ *temos*

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = -\int_{\pi}^{0} \frac{d\sigma}{\cos(2\pi - \sigma) - a} = \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{\cos(\sigma) - a}$$

de onde concluimos

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a}$$

Portanto basta calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a}$*. Considerando* $z = e^{i\theta}$ *temos que*

$$\cos(\theta) - a = \frac{z + z^{-1}}{2} - a = \frac{z^2 - 2az + 1}{2z}$$

Dai segue que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2az + 1}.$$

O polinômio $z^2 - 2az + 1$ *tem como raizes* $z_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}$, $z_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$, *e verifica-se que* $|z_1| < 1$ *e* $|z_2| > 1$, *portanto* z_1 *é o único ponto de singularidade no interior da circunferência da função*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2az + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Pelo Teorema do Resíduo temos que

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \underset{z=z_1}{Res} f(z) = -\frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Assim concluimos que

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

11.2 Integrais imprópias de funções racionais

Mostre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Dada que a função real $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$ *é uma função par, isto é, verifica* $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *separando a integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx$ *no semieixo positivo e negativo e fazendo uma mudança de variáveis temos que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx$$

basta mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Consideremos a função $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4 + 1}$. *Esta função tem como singularidades os pontos* $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_4 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. *Seja* $R > 0$, *consideremos a curva fechada simples* $\mathcal{C} = I_R \cup \mathcal{C}_R$ *percorrida em sentido antihorário, onde* $I_R = [-R, R]$ *e* $\mathcal{C}_R$ *é a semicircunferência superior de raio* R. *Considerando* R *sufientemente grande de tal forma* *que todas as singularidades de $f(z)$ situadas no plano superior estejam no interior de $\mathcal{C}$, neste caso somente as singularidades z_1 e z_2, então pelo teorema do Resíduo temos que*

$$\int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\underset{z=z_1}{Res} f(z) + \underset{z=z_2}{Res} f(z) \right)$$

istó é

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = -\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz + 2\pi i \left(\underset{z=z_1}{Res} f(z) + \underset{z=z_2}{Res} f(z) \right)$$

Agora tomaremos o limite quando $R \to \infty$. Evidentemente

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

Agora calculemos $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz$. Parametrizando $\mathcal{C}_R$ por $z(t) = Re^{it}$ onde $0 \leq t \leq \pi$ temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2t}}{R^4 e^{4t} + 1} \cdot iRe^{it}\, dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|R^4 e^{4t} + 1|}\, dt \end{aligned}$$

Como

$$|R^4 e^{4t} - (-1)| \geq |R^4 e^{4t}| - |-1| = R^4 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|R^4 e^{4t} + 1|} \leq \frac{1}{R^4 - 1}$$

temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz \right| &\leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4 - 1}\, dt \\ &\leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \end{aligned}$$

Dai segue que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz = 0$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \left(\underset{z=z_1}{Res} f(z) + \underset{z=z_2}{Res} f(z) \right)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1} = \frac{p(z)}{q(z)},$$

Então

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

analogamente

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i)$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Theorem 11.1 *Seja $f(z)$ uma função analítica no semiplano superior fechado $Im(z) \geq 0$ exeto nas singularidades $z_1, \ldots, z_m$ do semiplano superior aberto $Im(z) > 0$. Suponhamos que existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| \leq K/|z|^p$, $\forall z$ tal que $Im(z) > 0$ e $|z| > R_0$ para algum $p > 1$ e algum R_0 grande tal que $z_1, \ldots, z_m \in B_{R_0}(0)$. Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Proof: *Consideremos a curva fechada simples $\mathcal{C} = I_R \cup \mathcal{C}_R$ percorrida em sentido anti-horário, onde $I_R = [-R, R]$ e $\mathcal{C}_R$ é a semicircunferência superior de raio R. Considerando R sufientemente grande de tal forma que todas as singularidades de $f(z)$ situadas no plano superior estejam no interior de $\mathcal{C}$, então pelo teorema do Resíduo temos que*

$$\int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

istó é

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = -\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz + 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Agora tomaremos o limite quando $R \to \infty$. Evidentemente

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

Agora calculemos $\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz$. *Usando a hipótese sobre* $f(z)$ *temos*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz\right| &= \int_{\mathcal{C}_R} |f(z)||dz| \\ &= \int_{\mathcal{C}_R} \frac{K}{|z|^p}|dz| \\ &= \frac{K}{R^p}\int_{\mathcal{C}_R} |dz| \\ &= \frac{K\pi}{R^{p-1}}\end{aligned}$$

Como $p-1>0$, *segue que*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 0$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

□

Corollary 11.2 *Sejam* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são polinômios reais de ordem* n *e* m *respectivamente tal que* $q(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Se* $n+2\leq m$ *então*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\underset{z=z_k}{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right].$$

onde $z_1,\ldots,z_m$ *são todos os pontos de singularidade de* $p(z)/q(z)$ *situadas no plano superior* $Im(z)>0$.

11.3 Integrais imprópias envolvendo funções trigonométricas

Queremos encontrar o valor da integral imprópia

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx$$

Como o integrando é uma função par temos que

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx$$

Desafortunadamente cos *é uma função ilimitada nos complexos, pelo tanto não podemos usar o argumento anterior. Mas,* $\cos(x) = Re(e^{ix})$ *assim temos que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx\right)$$

Assim tentaremos encontrar o valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx$ *usando o teorema dos Resíduos. Consideremos a função* $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$*. Facilmente, encontramos que esta função tem como singularidades os pontos* $z = i, -i$*. Se* $z = x + iy$ *temos que se* $Im(z) > 0$ *e* $|z| > R_0$ *com* R_0 *suficientemente grande, tem-se*

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2+1|} = \frac{e^{-y}}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} \leq \frac{2}{|z|^2}.$$

Usando o teorema anterior temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i\cdot i}}{2\cdot i} = \frac{\pi}{e}$$

de onde concluimos que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Mostremos que:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx &= \frac{1}{2i}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\, dx \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{iy}}{y}\, dy\right)
\end{aligned}$$

Consideremos a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ *então para* $0 < r < R$ *temos que*

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\, dx + \int_{r}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz - \int_{C_r} f(z)\, dz = 0$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it}) iRe^{it}\,dt\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} |e^{Re^{it}}|\,dt
\end{aligned}
$$

Exercícios*:*

1. Seja $a > 1$. Calcule as seguintes integrais

$$(a)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta)+a}, \quad (b)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)d\theta}{\cos(2\theta)-a}, \quad (c)\ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(\cos(\theta)-a)^2}.$$

2. Seja $a > 0$. Calcule as seguintes integrais

$$(a)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)d\theta}{\sin(\theta)-a}, \quad (b)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)d\theta}{\sin(\theta)-a}, \quad (c)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta)d\theta}{\sin(\theta)-a}.$$

3. Mostre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2(\theta)+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}, \quad \textit{onde} \quad a > 0.$$

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Mostre que

$$(a)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}, \quad (b)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\beta^2)^2} = \frac{\pi}{4\beta^3}, \quad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{\pi}{\beta}.$$

5. Sejam $\alpha, \beta > 0$. Calcule

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+\alpha^4}, \quad (b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}, \quad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^2}.$$

6. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}, \quad \textit{onde} \quad a, b > 0.$$